

1. Introdução ao ajustamento por mínimos quadrados

O engenheiro geoespacial é o especialista na realização de observações de diversos tipos tais como desníveis, distâncias, ângulos horizontais e verticais, GNSS e respectiva combinação, dados estes utilizados normalmente para a determinação da posição espacial de pontos da superfície terrestre. O ajustamento por mínimos quadrados consiste numa metodologia para efectuar o controlo de qualidade das observações de uma forma objectiva, processando conjuntos redundantes de dados utilizando procedimentos matemáticos bem definidos (o termo redundante significa que existem mais observações do que as estritamente necessárias para resolver um determinado problema).

Não existem medições exactas, ou seja, qualquer medição contém erros, que podem ser de diversos tipos, ter várias origens e diferentes magnitudes. O controlo de qualidade das observações e dos resultados é um requisito de qualquer levantamento independentemente da respectiva precisão, ou seja, é tão importante num levantamento de baixa precisão, da ordem de 1 m, garantir que não há erros da ordem de 10 m como num levantamento de alta precisão, da ordem de 1 mm, garantir que não há erros da ordem de 1 cm. O ajustamento por mínimos quadrados permite a combinação de diferentes tipos de observações numa solução única; permite igualmente a planificação de trabalhos de campo de forma a assegurar que as especificações prévias de precisão são alcançadas, incluindo esta simulação, no caso de existir alternativa, a seleção do tipo de observações mais adequado (num dado caso particular, indicar se é melhor observar direções ou distâncias, por exemplo), assim como em função das características de precisão dos instrumentos disponíveis, escolher o mais indicado para um dado projecto.

Com a excepção da contagem, uma medição envolve a realização de diversas operações físicas como sejam, por exemplo, a colocação de um aparelho em estação, a realização da pontaria, a comparação com um padrão e o registo da leitura respectiva, à qual é atribuído um valor numérico designado por medição (numa medição direta obtém-se o valor da grandeza pretendida comparando-a directamente com um padrão; numa medição indireta o valor da grandeza pretendida é obtido por derivação matemática de outras grandezas medidas directamente). Considere-se que se utiliza uma fita métrica graduada em centímetros para medir repetidamente uma distância exactamente igual a 100 m; devido à graduação centimétrica da fita, o operador provavelmente regista valores com duas casas decimais, podendo erradamente concluir-se que a medição da distância fornece valores discretos com duas casas decimais. Na realidade, estes valores com duas casas decimais são consequências da graduação centimétrica da fita e do facto de quem efectua as leituras não estimar os milímetros; supondo que o dispositivo de medida fornecia um número de casas decimais infinito, torna-se claro que a medição de uma distância (ou de qualquer outra observável) pertence à estatística contínua pois do processo pode resultar qualquer valor, embora a experiência mostre que valores mais próximos de 100.00 sejam mais prováveis. Tem-se assim que são necessários alguns conceitos de estatística para a realização do ajustamento por mínimos quadrados:

- uma observação, como seja a medição de um ângulo, é o resultado de um acontecimento estatístico, representada através de uma variável aleatória
- a população constitui a totalidade dos acontecimentos, incluindo todos os valores que uma variável aleatória pode ter, sendo descrita por um número finito de parâmetros
- uma amostra é um subconjunto da população; por exemplo, se uma distância for medida 10 vezes, estas 10 observações são uma amostra de todas as possíveis medições

Exemplo: considere-se o caso da observação de um ângulo horizontal entre duas direcções, sendo a população composta pela totalidade dos valores possíveis da variável aleatória, o que torna impraticável determinar todos os valores para obter os parâmetros característicos da distribuição; na prática, considera-se suficiente um número limitado de observações, que são utilizadas para estimar o ângulo pretendido.

Os aparelhos utilizados nas observações não são perfeitos, assim como não é perfeito o registo e o processamento dos dados. Classicamente os erros que afectam as observações são de três tipos: erros grosseiros, em geral de grande magnitude, devidos à falta de cuidado da parte do observador (engano no registo das leituras, por exemplo), erros sistemáticos, que ocorrem segundo um determinado padrão (uma fita métrica descalibrada, que indica valores maiores (sempre positivos) ou menores (sempre negativos) do que os valores verdadeiros, não sendo eliminados na realização de médias de leituras) e erros aleatórios (em geral de pequena magnitude, positivos e negativos). Para a realização do ajustamento das observações é condição fundamental que os erros grosseiros e os erros sistemáticos tenham sido eliminados ou corrigidos, podendo assim o conjunto de observações ser considerado como uma amostra de uma dada variável aleatória com distribuição normal. Os valores numéricos resultantes da medição de uma dada grandeza constituem uma amostra da variável aleatória correspondente a essa grandeza. Essa amostra (por vezes constituída por um único elemento) é utilizada para deduzir ou estimar o valor esperado μ e a variância σ^2 da variável aleatória respectiva. Os estimadores de μ e de σ^2 são a média aritmética e a variância da amostra de dimensão n :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2.$$

Note-se que $\bar{x}$ é um estimador não enviesado de μ e que a sua variância é igual a σ^2/n , designando-se $\sigma/\sqrt{n}$ por erro padrão de $\bar{x}$, normalmente aproximado por $s/\sqrt{n}$. Esta fórmula indica que quanto maior for a dimensão da amostra mais precisa é a determinação do parâmetro média da amostra; assim, por exemplo, para duplicar a precisão de uma dada grandeza medida (direcção, distância) é necessário quadruplicar o número de observações dessa grandeza. Note-se ainda que s^2 é um estimador não enviesado de σ^2 mas s é um estimador enviesado de σ ; no caso de se pretender um estimador não enviesado para σ deve utilizar-se o estimador

$$s^* = \sqrt{\frac{1}{c_n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \text{ com } c_n = \left(\frac{\sqrt{2} \Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \right)^2, \text{ sendo } \Gamma(x) \text{ a função gama.}$$

n	2	3	4	5	10	15	20	30	90
$n-1$	1	2	3	4	9	14	19	29	89
c_n	0.64	1.57	2.55	3.53	8.51	13.51	18.51	28.50	88.50

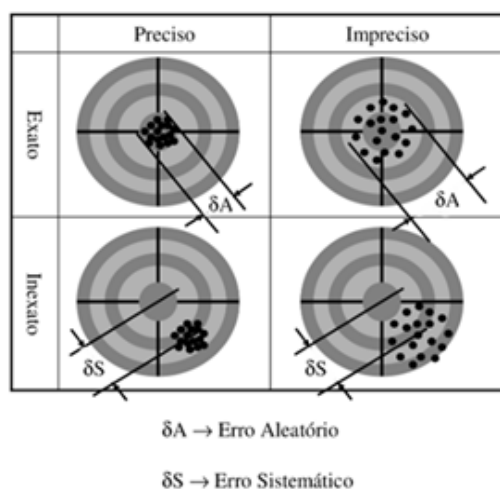
Comparação dos valores de n , $n-1$ e c_n para a estimação não enviesada de σ

Se uma amostra consistir apenas num único elemento, não é possível utilizar a expressão anterior para o cálculo do desvio padrão; na prática isto não constitui um problema pois normalmente o aparelho e a metodologia utilizados para obter essa observação já foram utilizados noutras circunstâncias, de onde se obteve uma estimativa para s . Para além disto, os construtores dos aparelhos indicam para cada aparelho e em condições muito gerais o valor do desvio padrão de uma medição.

Em caso de dúvida, deve ser realizada uma série de testes consistindo em leituras repetidas de forma a determinar o desvio padrão das observações efectuadas por um determinado aparelho. Antes da realização das observações é conveniente verificar a instrumentação disponível e confirmar o desvio padrão das respectivas observações, assim como calibrar regularmente os aparelhos de forma a evitar erros sistemáticos.

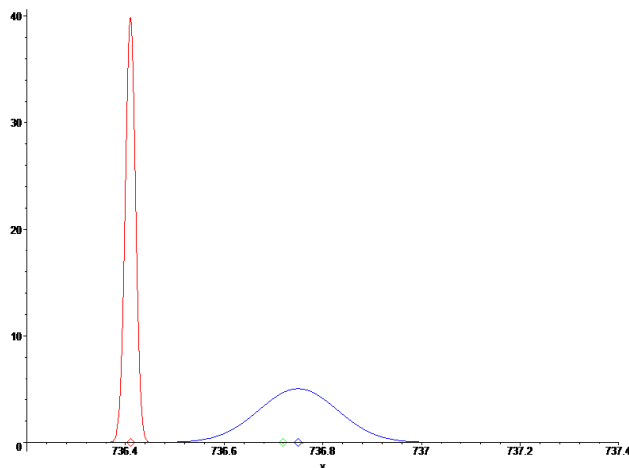
É muito importante conhecer os requisitos de precisão impostos *a priori*, de forma a que o projecto seja correctamente concebido: não interessa obter uma precisão para as coordenadas melhor do que o pretendido pois isso implica normalmente um custo mais elevado do que o necessário nem interessa obter uma precisão para as coordenadas pior do que o pretendido pois isso implica um aumento do custo por ser necessário repetir as observações.

A exactidão de uma observação é uma indicação da proximidade dessa observação do valor verdadeiro da grandeza que se pretende medir; assim, para se obter observações exactas os aparelhos de medida devem ser regularmente calibrados por comparação com um padrão, o que permite a eliminação de erros sistemáticos. A precisão de uma observação está relacionada com a “perfeição” com que essa observação foi obtida, o que depende da qualidade do aparelho utilizado, da respectiva resolução (menor unidade de leitura) e da repetibilidade dessa observação, factores que influenciam os erros aleatórios que afectam essa observação (a repetibilidade traduz o grau de concordância entre os resultados de medições sucessivas de uma mesma grandeza, efectuadas nas mesmas condições: método de observação, observador, instrumento de medida, local, condições de utilização e em intervalos de tempo curtos entre medições; a repetibilidade pode ser expressa quantitativamente em termos de dispersão de resultados).



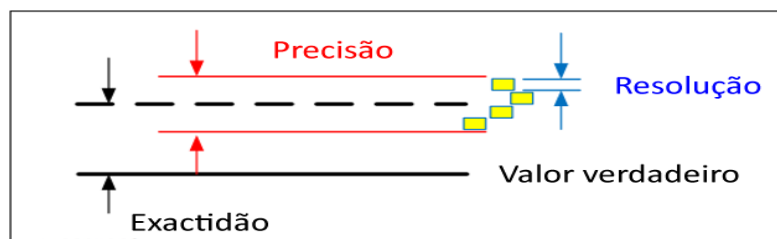
A exactidão de um conjunto de medidas representa o grau de proximidade dos valores observados com o valor verdadeiro da grandeza medida. A precisão de um conjunto de medidas traduz a dispersão dos valores observados entre si. Assim a exactidão é influenciada pelos erros sistemáticos e a precisão é influenciada pelos erros aleatórios. O conceito de exactidão aparece sempre ligado a um valor de referência de uma dada grandeza, utilizado para comparação. Uma precisão grande não reflecte necessariamente uma exactidão grande. **Na ausência de erros sistemáticos, $\delta S=0$, o desvio padrão (a precisão) constitui uma medida de avaliação da exactidão.**

Exemplo: como ilustração da diferença entre os termos exactidão e precisão, considere-se que uma distância é medida cinco vezes utilizando duas fitas métricas: com a primeira obtiveram-se os valores 736.80 m, 736.70 m, 736.75 m, 736.85 m, 736.65 m e com a segunda obtiveram-se os valores 736.42 m, 736.40 m, 736.40 m, 736.42 m, 736.41 m. Analizando a dispersão dos resultados pode dizer-se que a segunda série de observações é mais precisa que a primeira série; admitindo que o valor “verdadeiro” da distância (obtido por um método mais rigoroso) é 736.72 m, como os valores da primeira série de observações tendem a agrupar-se em torno do valor verdadeiro, esta série é mais exacta do que a segunda. Manifestamente, a segunda série foi obtida utilizando uma fita afectada por algum tipo de erro sistemático. Por esta razão, é fundamental utilizar aparelhos calibrados ou de alguma forma corrigir *a posteriori* a existência de algum sistematismo nas observações.

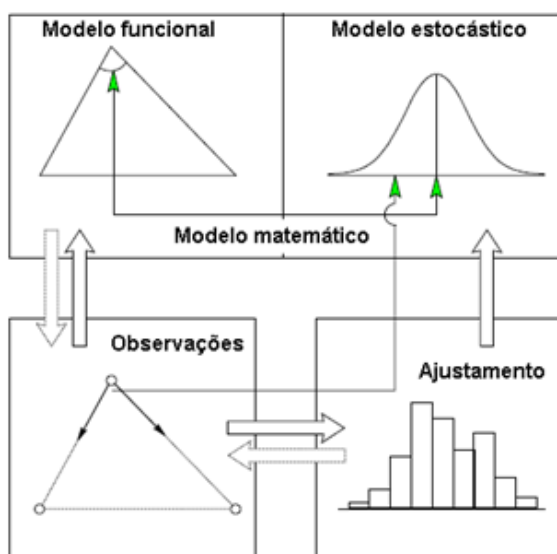


Admitindo uma distribuição normal, interpretação gráfica das duas séries de observações, com a indicação dos respectivos valores médios, 736.75 e 736.41 assim como do valor médio “exacto”, 736.72 (os desvios padrão são, respetivamente, 0.0791 e 0.0100)

As medições ou observações são raramente usadas directamente, sendo utilizadas para a obtenção de posições relativas, áreas, volumes, etc., sendo a relação entre as observações e as quantidades pretendidas definida através do modelo matemático, que se decompõe no modelo funcional e no modelo estocástico.



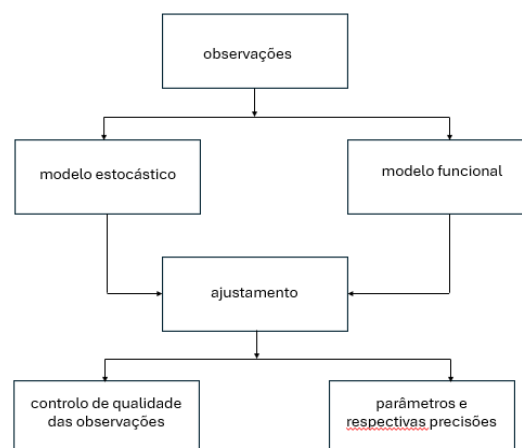
A figura ilustra os termos exactidão, precisão e resolução: os rectângulos a amarelo representam os valores medidos, sendo o eixo das abcissas o tempo. Um sensor ideal deveria repetidamente fornecer o mesmo output, correspondente ao valor verdadeiro, representado pela linha contínua a preto. A precisão ou repetibilidade traduz a dispersão dos sucessivos valores de output. A exactidão depende da diferença entre a média dos valores de output, representada pela linha a tracejado a preto e o valor verdadeiro. A resolução representa a variação mínima do valor medido que resulta num valor diferente de output, sendo normalmente menor que a exactidão.



Modelo matemático: o ajustamento por mínimos quadrados envolve duas componentes indispensáveis: o modelo funcional e o modelo estocástico, sendo as observações o input para o processo. O modelo funcional representa uma simplificação da realidade física, exprimindo matematicamente relações entre as observações e/ou entre as observações e outras quantidades designadas por parâmetros; o modelo estocástico introduz informação acerca da precisão relativa das observações.

Exemplo: suponha que se pretendia determinar a área de uma parcela rectangular, num terreno plano e horizontal (para evitar reduções das observações), suposta suficientemente pequena de forma que se pode considerar a superfície terrestre localmente plana, em vez de elipsoidal. Para o efeito é necessário medir o comprimento a e a largura b dessa parcela, sendo a área dada por $A=ab$, o que define o modelo funcional (as condições geométricas ou físicas do problema). Trata-se agora de ir ao local e efectuar a medição do comprimento dos dois lados do rectângulo, por hipótese com uma fita métrica, sendo necessário percorrer cada lado, colocando o zero da graduação no início da estrema, esticar a fita métrica, marcar no terreno o local da outra extremidade da fita métrica, repetir o processo até se alcançar o fim da estrema e somar todos os valores que foram lidos (admite-se que se garantiu que as diversas medições foram efectuadas segundo a mesma direcção). Devido a alguma(s) fonte(s) de erro cometido nas diversas fases, seja pelo observador, seja por imperfeição da fita métrica, seja por condições ambientais, não é possível garantir que o valor obtido para os lados do polígono sejam o valor exacto, de tal forma que se se repetisse a medição provavelmente obter-se-ia um valor diferente: não há razão para aceitarmos um ou outro pois ambos são igualmente razoáveis. A variabilidade em medições repetidos realizadas em condições similares é uma propriedade inerente aos processos físicos e deve ser aceite como uma propriedade básica das observações, o que implica a necessidade de completar o modelo funcional com o modelo estocástico, que descreve as propriedades estatísticas dos elementos envolvidos no problema.

Processo de estimação por mínimos quadrados



O modelo estocástico introduz informação acerca da precisão das observações, através da matriz de variâncias-covariâncias Σ_ℓ . Na maior parte dos casos esta matriz é diagonal, o que indica que as observações são não correlacionadas; por vezes, no caso de observações derivadas de outras observações (por exemplo um ângulo obtido por diferença de duas direcções) ou observações que resultam de um ajustamento anterior, a matriz de variâncias-covariâncias pode ter elementos fora da diagonal principal não nulos. Em rigor, o ajustamento por mínimos quadrados requer como input não a matriz Σ_ℓ das observações mas a matriz cofactor Q_ℓ das observações, cuja inversa é a matriz W_ℓ dos pesos das observações. O conceito de peso de uma observação é uma medida da incerteza associada a essa observação relativamente às restantes observações efectuadas, ou seja, traduz o respectivo valor relativo quando comparada com as restantes observações, controlando dessa forma a dimensão da correção que lhe é aplicada. A necessidade da introdução deste conceito surge do facto de muitas vezes não serem conhecidos os valores (absolutos) dos elementos da matriz de variâncias-covariâncias Σ_ℓ das observações mas apenas alguma relação entre esses valores (por exemplo, observações de igual precisão, sem se indicar qual é esse valor). Dada uma observação cuja variância é σ_i^2 , define-se um factor de proporcionalidade arbitrário denominado variância *a priori* por unidade de peso, σ_0^2 , de tal forma que o peso w_i dessa observação é:

$w_i \propto \frac{1}{\sigma_i^2} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$, ou $w_1\sigma_1^2 = w_2\sigma_2^2 = \dots = w_n\sigma_n^2 = \sigma_0^2$, ou, na forma matricial: $W_\ell = \sigma_0^2 \Sigma_\ell^{-1}$, isto é, o peso de uma observação é inversamente proporcional à respectiva variância (a designação variância por unidade de peso vem do facto de se a variância de uma observação for igual a σ_0^2 , então o respectivo peso é igual a 1). Nesta definição dos pesos assume-se que as observações são não correlacionadas (independentes); no caso de observações correlacionadas os pesos não constituem uma forma adequada de descrever a precisão relativa dessas observações:

$$q_{ii} = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_0^2}, \quad q_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0^2} \quad \text{ou} \quad Q_\ell = \frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma_\ell.$$

No caso de observações não correlacionadas, as covariâncias são iguais a zero e portanto as matrizes de variâncias-covariâncias, cofactor e dos pesos são diagonais. No caso de observações correlacionadas pode acontecer que a matriz cofactor seja singular e portanto não tem inversa, não existindo a matriz dos pesos. Se Q_ℓ é uma matriz não singular, a sua inversa é a matriz dos pesos das observações: $W_\ell = Q_\ell^{-1} = \sigma_0^2 \Sigma_\ell^{-1}$. A atribuição de pesos às observações é tida como uma das tarefas mais complexas no processo de ajustamento, dependendo do(s) aparelho(s) utilizado(s), do(s) operador(es) envolvido(s) e das condições ambientais que se verificavam por ocasião da realização das observações, assim como de outro tipo de informação. Por exemplo, tendo uma distância sido medida 3 vezes, depois 6 vezes e ainda 4 vezes, normalmente o peso atribuído a cada uma das médias é 3, 6 e 4, o que é uma forma bastante grosseira na medida em que para duplicar a precisão de um conjunto de medidas é necessário quadruplicar o número de observações.

Exemplo: dadas 3 observações não correlacionadas em m de uma dada distância, $\ell_1=136.225\pm0.010$, $\ell_2=136.233\pm0.032$, $\ell_3=136.218\pm0.024$, tem-se, considerando $\sigma_0^2=1$: $w_1=1/0.010^2=10000$, $w_2=1/0.032^2=976.5625$, $w_3=1/0.024^2=1736.111(1)$; como alternativa, atribuindo peso 1 à observação com maior desvio padrão, tem-se: $w_2=1=\sigma_0^2/0.032^2$, donde $\sigma_0^2=0.032^2$, $w_1=\sigma_0^2/0.010^2=10.24$, $w_3=\sigma_0^2/0.024^2=1.777(7)$. Em qualquer dos casos, a razão entre pesos mantém-se.

Exemplo: tendo sido observados os ângulos α e β de um triângulo com $s_\alpha=6''$ e $s_\beta=4''$, a) calcule p_β sabendo que $p_\alpha=1$, b) calcule p_γ sendo $\gamma=180^\circ-\alpha-\beta$.

a) $p_\alpha=1=\sigma_0^2/6^2 \Rightarrow \sigma_0^2=36$; $p_\beta=36/4^2=2.25$

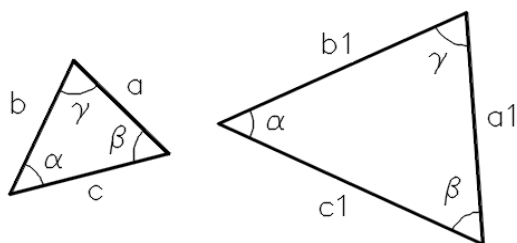
b) $\Sigma_\gamma = J^T \Sigma_{\alpha\beta} J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} & \frac{\partial \gamma}{\partial \beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_\alpha^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_\alpha^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 36+16=52$; $p_\alpha=36/52=0.7$

Frequentemente os dados iniciais (os valores observados) sofrem reduções. Por exemplo, a refração atmosférica afecta de forma significativa as medições de ângulos verticais; se as observações originais forem utilizadas no ajustamento, o modelo matemático deve ser suficientemente geral para estimar os parâmetros da refração; como alternativa, as observações originais podem ser corrigidas do efeito da refração utilizando um modelo atmosférico. Como regra geral, quanto menos reduções forem aplicadas às observações originais, mais geral (complexo) será o modelo matemático adoptado, o que vai depender do objectivo do ajustamento (se se pretender estudar a refração então o modelo deve incluir de forma explícita parâmetros da refração).

As variáveis observadas em Topografia (desníveis, direcções, distâncias, bases GNSS, por exemplo) são variáveis aleatórias que teriam valores diferentes se as observações fossem repetidas. Do ponto de vista estatístico, o ajustamento de observações é um método para a obtenção de estimativas de variáveis estocásticas e das respectivas distribuições a partir de amostras, só se justificando no caso de existir redundância. Antes da realização das observações deve ser especificado o modelo funcional que representa o problema em estudo, através de um determinado número de variáveis (parâmetros, observações ou ambos) e das relações entre essas variáveis. É importante notar que o mesmo problema pode ser representado por modelos funcionais diferentes, contendo cada um deles elementos diversos, dependendo de decisões quanto ao objectivo e extensão pretendidos; fixado o modelo, designa-se por n_0 o número mínimo de observações que define esse modelo, cujo papel é fundamental no processo de ajustamento, embora não seja necessário especificar nesta fase cada observação que venha a ser necessária.

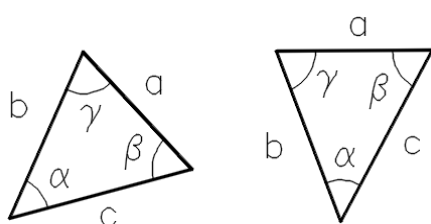
Exemplo:

- a forma de um triângulo plano é determinada por duas variáveis ($n_0=2$), que podem ser quaisquer dois dos três ângulos internos ou as razões dos três lados, podendo haver rotações e ampliações/reduções do triângulo, mantendo-se a forma:



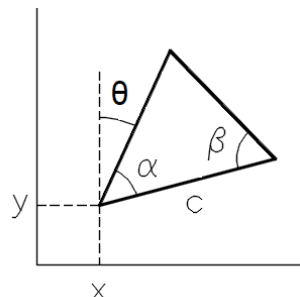
1. α, β
2. α, γ
3. β, γ
4. $a/b, b/c, c/a$

- a dimensão e a forma de um triângulo plano são determinados por três variáveis ($n_0=3$), que não podem ser os três ângulos internos pois é necessária uma dimensão linear para fixar a escala de forma a evitar ampliações ou reduções, podendo seleccionar-se diversas opções como sejam dois ângulos e um lado, dois lados e um ângulo ou três lados:



1. α, β, a ; α, β, b ; α, β, c
2. α, γ, a ; α, γ, b ; α, γ, c
3. β, γ, a ; β, γ, b ; β, γ, c
4. a, b, α ; a, b, β ; a, b, γ
5. a, c, α ; a, c, β ; a, c, γ
6. b, c, α ; b, c, β ; b, c, γ
7. a, b, c

- a dimensão, a forma, a orientação e a posição de um triângulo plano relativamente a um dado referencial são determinados por seis variáveis ($n_0=6$), duas para fixar a posição de um ponto (um dos vértices do triângulo, por exemplo), uma para fixar a escala (o comprimento de um dos lados do triângulo), uma para fixar a orientação do triângulo e duas para fixar a forma do triângulo.



Como foi dito atrás, uma vez escolhido o modelo, fica definido o número mínimo de variáveis n_0 que determinam esse modelo. Se o número de observações realizadas não for suficiente para calcular as n_0 variáveis, o problema não tem solução; sendo n o número de observações, supostas funcionalmente independentes (ou seja, não é possível derivar alguma das observações a partir das $n-1$ observações restantes), se $n > n_0$ existe redundância ou número de graus de liberdade: $r = n - n_0$, que tem significado apenas quando as observações e o modelo são mutuamente consistentes (veja-se o exemplo da determinação da forma e dimensão do triângulo plano, em que $n_0=3$; mesmo que por hipótese cada um dos três ângulos tenham sido observados duas vezes, ou seja, $n=6$, e portanto a redundância $r = 6-3 = 3$, o problema não tem solução porque a escala e portanto a dimensão não fica determinada).

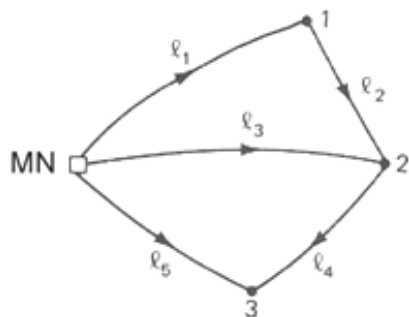
Exemplo: Designando os três ângulos internos de um triângulo por α , β , γ e assumindo que a determinação da forma do triângulo é o problema a resolver, tem-se, como já se viu, $n_0=2$; considerem-se as seguintes possibilidades:

- cada ângulo é observado uma vez, $n = 3$, $r = 3 - 2 = 1$
- cada ângulo é observado duas vezes, $n = 6$, $r = 6 - 2 = 4$
- o ângulo α é observado duas vezes e os restantes ângulos são observados uma vez, $n = 4$, $r = 4 - 2 = 2$
- o ângulo α é observado quatro vezes, $n = 4$, $r = 4 - 2 = 2$; no entanto, o problema não pode ser resolvido com este conjunto de observações; neste caso o problema inicial tem que ser reformulado, reduzindo-se à determinação do ângulo α , em que $n_0=1$, $r = 4 - 1 = 3$, obtendo-se uma estimativa única para o ângulo em questão.

2. Princípio dos mínimos quadrados

Devido às propriedades estocásticas das observações, as observações redundantes não são geralmente compatíveis com o modelo funcional, pois qualquer subconjunto de observações de dimensão n_0 dá origem a resultados diferentes. Por exemplo, quaisquer dois dos três ângulos medidos de um triângulo é suficiente para determinar a respectiva forma; no entanto qualquer par possível desses ângulos resulta num triângulo diferente do que o obtido com outro par de ângulos (inconsistência). Assim, não é possível obter um resultado único independentemente do par de ângulos considerado a não ser que acrescente um critério suplementar.

O conjunto original de observações vai ser designado pelo vector $\vec{\ell}$, que após a realização do ajustamento, vai ser substituído pelo vector das estimativas $\hat{\vec{\ell}}$ compatíveis com o modelo, o que implica que as relações funcionais que constituem o modelo funcional são aceites como mais importantes que o conjunto de observações originais (por consequência, após a realização do ajustamento, as relações funcionais permanecem inalteradas, sendo estritamente verificadas pelo novo conjunto de estimativas $\hat{\vec{\ell}}$).



Exemplo: considere-se a rede de nivelamento geométrico representada na figura, que contém a marca de nivelamento MN de altitude conhecida (102.251 m) e os pontos 1, 2 e 3 cujas altitudes x_1 , x_2 e x_3 se pretende determinar, tendo para o efeito sido observados os 5 desníveis $\ell_1=5.011$ m, $\ell_2=2.989$ m, $\ell_3=8.018$ m, $\ell_4=1.009$ m e $\ell_5=8.992$ m. O modelo matemático é linear pois as equações que relacionam os 3 parâmetros x_1 , x_2 e x_3 e as 5 observações ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 , ℓ_4 e ℓ_5 são lineares, envolvendo apenas somas e subtrações. Para efectuar o transporte da altitude de MN para os pontos 1, 2 e 3 são suficientes 3 desníveis, isto é, o número

mínimo de observações (desníveis) que permitem resolver o problema é $n_0=3$. Tendo sido observados $n=5$ desníveis, a redundância é $r=n-n_0=2$ e sendo o número de parâmetros $u=3$, o número de equações que é possível estabelecer entre as 5 observações e os 3 parâmetros é $c=r+u=5$. Se apenas tivessem sido realizadas as 3 observações indispensáveis para resolver o problema anterior, por exemplo ℓ_1 , ℓ_3 e ℓ_5 , qualquer erro que tivesse sido cometido nalgum dos desníveis não seria detectado e portanto as altitudes obtidas poderiam estar erradas. Há portanto toda a vantagem em efectuar observações redundantes que permitem não só detectar erros nas observações mas também aumentar a precisão do resultado final.

A realização de observações redundantes tem como efeito secundário o aparecimento de inconsistências devidas aos erros que afectam as observações: por exemplo, no caso da rede de nivelamento anterior, considerando o circuito fechado que liga a marca de nivelamento BM aos pontos 1 e 2 tem-se $\ell_1+\ell_2-\ell_3=5.011+2.989-8.018=-0.018\neq 0$, ou a altitude do ponto 2 será diferente consoante o percurso: $MN+\ell_1+\ell_2=110.251$ m e $MN+\ell_5-\ell_4=110.234$ m. Para resolver o problema é necessário introduzir variáveis adicionais designadas resíduos ou correcções às observações: $\ell_1+\gamma_1+\ell_2+\gamma_2-\ell_3-\gamma_3=0$, $MN+\ell_1+\gamma_1+\ell_2+\gamma_2=MN+\ell_5+\gamma_5-\ell_4+\gamma_4$ que tornam as equações anteriores verdadeiras e cujo valor será obtido após a realização do ajustamento, permitindo a obtenção das observações ajustadas $\hat{\ell} = \ell + \gamma$, compatíveis com o modelo.

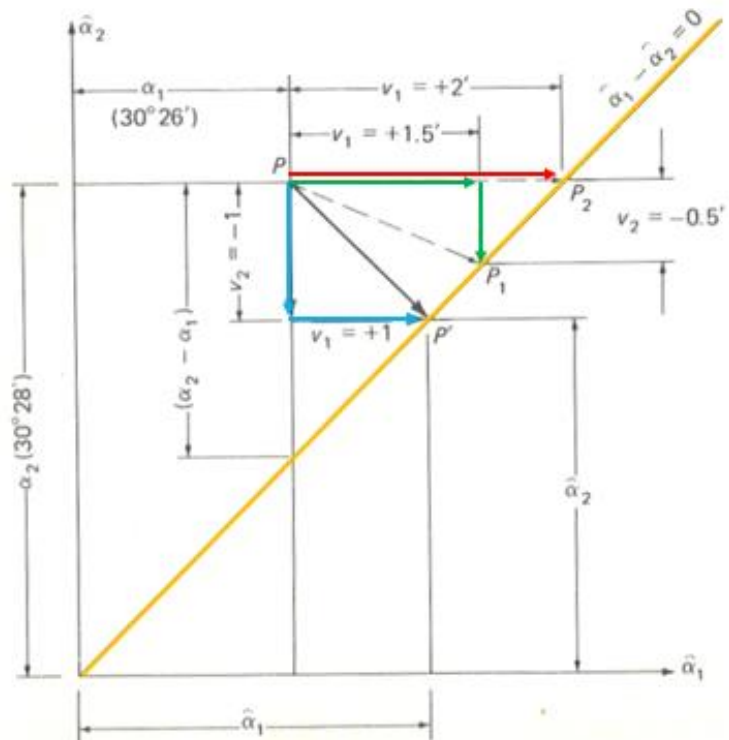
Exemplo: considere-se o caso da medição de um ângulo; o modelo é composto por uma variável aleatória α , com $n_0=1$. Se o ângulo for medido 2 vezes ($n=2$), há uma observação redundante e a inconsistência de ter 2 valores α_1 e α_2 diferentes tem de ser resolvida. Sejam γ_1 e γ_2 dois resíduos que quando somados a α_1 e α_2 , respectivamente, fornecem uma estimativa única para o ângulo, isto é, $\alpha_1 + \gamma_1 = \alpha_2 + \gamma_2 = \hat{\alpha}$. Supondo $\alpha_1=30^\circ 26'$, $\alpha_2=30^\circ 28'$, os resíduos $\gamma_1=+1.5'$ e $\gamma_2=-0.5'$ conduzem aos valores ajustados $\alpha_1 + \gamma_1 = 30^\circ 27.5'$ e $\alpha_2 + \gamma_2 = 30^\circ 27.5'$ iguais; da mesma forma os resíduos $\gamma_1=+2'$ e $\gamma_2=0'$ conduzem aos valores ajustados $\alpha_1 + \gamma_1 = 30^\circ 28'$ e $\alpha_2 + \gamma_2 = 30^\circ 28'$ iguais; ou ainda os resíduos $\gamma_1=+1'$ e $\gamma_2=-1'$ conduzem aos valores ajustados $\alpha_1 + \gamma_1 = 30^\circ 27'$ e $\alpha_2 + \gamma_2 = 30^\circ 27'$ iguais. Não há dúvida que a introdução dos resíduos permite eliminar inconsistências mas é necessário definir um critério para escolher das infinitas soluções possíveis a mais conveniente. O critério seleccionado para escolher um dos infinitos pares de resíduos tem o nome de critério dos mínimos quadrados, segundo o qual a soma dos quadrados dos resíduos deve ser minimizada; no exemplo tem-se respectivamente:

$$\Phi = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1.5^2 + (-0.5)^2 = 2.5,$$

$$\Phi = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 2^2 + 0^2 = 4,$$

$$\Phi = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2.$$

Geometricamente, atribuindo o eixo das abcissas a $\hat{\alpha}_1$ e o eixo das ordenadas a $\hat{\alpha}_2$, pretende-se que $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$, condição representada pela **bissectriz**. Os valores observados α_1 e α_2 definem o ponto P, que deve ser substituído pelo ponto P' sobre a bissectriz, de tal forma que a distância PP' seja **mínima** (PP' perpendicular à bissectriz).

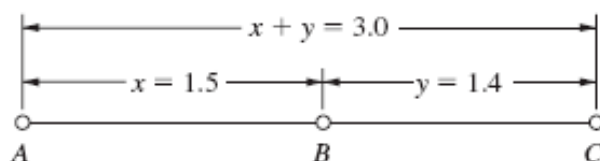


Sendo os dois conjuntos $\vec{\ell}$ e $\hat{\vec{\ell}}$ em geral diferentes (quando $r = 0$, $\hat{\vec{\ell}} = \vec{\ell}$), o vector dos resíduos das observações dado por $\vec{\gamma} = \hat{\vec{\ell}} - \vec{\ell}$ tem um papel importante no processo do ajustamento pois da análise dos respectivos elementos é possível testar a adequação do modelo adoptado à realidade, o que por vezes pode levar a uma remodelação completa do problema, substituindo-se o modelo.

De todas as possibilidades para a selecção do vector dos resíduos $\vec{\gamma}$, existe um conjunto que para além de ser consistente com o modelo, satisfaz o critério dos mínimos quadrados, cujo objectivo é garantir que as estimativas $\hat{\vec{\ell}}$ são tão próximas quanto possível com o conjunto $\vec{\ell}$ original das observações, entrando em consideração com as respectivas propriedades estocásticas:

$\Phi = \vec{\gamma}^t W_{\ell} \vec{\gamma} = \sum_{i=1}^n (w_i \gamma_i^2)$ seja **mínimo**, onde W_{ℓ} é a matriz dos pesos das observações, $W_{\ell} = Q_{\ell}^{-1}$, Q_{ℓ} é a matriz cofactor das observações. Note-se que a aplicação do critério dos mínimos quadrados não requer o conhecimento *a priori* da distribuição das observações, bastando que as matrizes W_{ℓ} ou Q_{ℓ} sejam conhecidas.

Exemplo: considerem-se os pontos A, B e C, pretendendo-se calcular as distâncias $x=AB$ e $y=BC$; para o efeito observaram-se as três distâncias indicadas na figura, igualmente pesadas, podendo estabelecer-se as três equações seguintes



$$\begin{cases} x = 1.5 \\ y = 1.4 \\ x + y = 3.0 \end{cases}$$

Os valores de x e y podem ser obtidos a partir de quaisquer duas das três equações anteriores, embora esses valores variem consoante a combinação escolhida devido ao facto de as observações conterem erros. Introduzindo nas equações os resíduos, tem-se

$$\begin{cases} x = 1.5 + \gamma_1 \\ y = 1.4 + \gamma_2 \\ x + y = 3.0 + \gamma_3 \end{cases}$$

e a solução por mínimos quadrados é $\Phi = \vec{\gamma}^t W \vec{\gamma} = \sum_{i=1}^n (w_i \gamma_i^2)$ seja mínimo, isto é, $\Phi = (x - 1.5)^2 + (y - 1.4)^2 + (x + y - 3.0)^2$ seja mínimo, donde (considerando os pesos unitários):

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2(x - 1.5) + 2(x + y - 3.0) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2(y - 1.4) + 2(x + y - 3.0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 4.5 \\ x + 2y = 4.4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1.533 \\ y = 1.433 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_1 = 1.533 - 1.500 = 0.033 \\ \gamma_2 = 1.433 - 1.400 = 0.033 \\ \gamma_3 = 1.533 + 1.433 - 3.000 = -0.033 \end{cases}$$

3. Aplicação do princípio dos mínimos quadrados

O modelo matemático representa o ponto inicial do procedimento, a partir do qual o ajustamento pode ser aplicado, seleccionando-se então a técnica particular de mínimos quadrados, cujo processo de cálculo fornece estimativas das variáveis do modelo assim como das respectivas matrizes cofactor e de variância-covariância; em seguida, é necessário avaliar estatisticamente o resultado, o que pode levar a uma remodelação do ajustamento se o modelo adoptado não for adequado. Fixado o modelo e partindo de um determinado conjunto de dados, o ajustamento por mínimos quadrados produz uma solução única, independentemente da técnica utilizada.

Para além das observações, o modelo pode igualmente incluir outras variáveis também aleatórias designadas por parâmetros (para as distinguir das observações, cujo valor *a priori* é conhecido, enquanto que inicialmente os parâmetros, não resultando de uma amostragem, têm valor desconhecido, posteriormente obtido após a realização do ajustamento) e constantes numéricas. O número de parâmetros incluídos no ajustamento designa-se por u , utilizando-se o vector $\vec{\Delta}_{u,1}$ para representar o conjunto de parâmetros.

A técnica adoptada de ajustamento por mínimos quadrados opera sobre um dado conjunto de equações que descrevem o modelo funcional. Distinguem-se dois tipos de equações: equações de condição (um ajustamento contém sempre equações de condição), que incluem uma ou mais observações e eventualmente parâmetros e equações de constrangimento, que não incluem observações, relacionando apenas parâmetros e eventualmente constantes.

As equações de condição e de constrangimento incluídas num ajustamento são muitas vezes não lineares e por consequência têm de ser linearizadas através de um desenvolvimento em série de Taylor onde apenas se retêm os termos de ordem zero e um; por esta razão, é necessário um processo iterativo que atenue o facto de se desprezarem os termos de ordem igual ou superior a 2, assim como é necessária uma aproximação inicial para os parâmetros, cuja escolha tem um papel importante na resolução do problema, embora não exista uma forma objectiva para seleccionar essa aproximação inicial para o processo iterativo. Deve realçar-se que o método dos mínimos quadrados se aplica somente a modelos lineares, não fazendo o processo de linearização, quando as equações forem não lineares, parte do método dos mínimos quadrados. É igualmente necessário definir um critério de paragem do processo iterativo.

Considerando um conjunto de m funções não lineares $\vec{F}(\vec{x})=0$, onde $\vec{x}_{p,1}$ é o vector das p variáveis desconhecidas (observações ajustadas e/ou parâmetros), se $\vec{x}_{p,1}^0$ representar o vector da aproximação inicial dos valores das variáveis, retêm-se os termos de ordem zero e de ordem um do desenvolvimento em série da função $\vec{F}$:

$$\vec{F}(\vec{x}^0) + \frac{\partial \vec{F}(\vec{x})}{\partial \vec{x}} \bigg|_{\vec{x}=\vec{x}^0} \cdot \Delta(\vec{x}) = 0,$$

onde $\Delta(\vec{x})$ é o vector $p \times 1$ das actualizações da aproximação inicial em cada iteração e o conjunto das derivadas parciais de $\vec{F}$ relativamente aos elementos do vector das variáveis constitui uma matriz $m \times p$, designada por U , isto é $U \cdot \Delta(\vec{x}) = -\vec{F}(\vec{x}^0)$, de onde se tira $\Delta(\vec{x})$, de tal forma que na iteração seguinte a aproximação utilizada é $\vec{x}^0 + \Delta(\vec{x})$ e assim sucessivamente até ser verificado um critério de paragem do processo iterativo, sendo a estimativa final de $\vec{x}$ a soma da aproximação inicial $\vec{x}^0$ mais todas as actualizações $\Delta(\vec{x})$. Note-se que o método dos mínimos quadrados é aplicado em cada iteração sobre um conjunto linearizado de equações, não dependendo do processo de linearização.

Exemplo: determine a solução por mínimos quadrados do seguinte sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} x + y - 2y^2 + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8 = 0 \\ 3x^2 - y^2 - 7.7 = 0 \end{cases}$$

Trata-se, em primeiro lugar, de linearizar as 3 equações em torno do ponto $(x_0, y_0)=(2, 2)$, uma das soluções do sistema constituído pelas primeiras duas equações do sistema original:

$$\begin{cases} (x_0 + y_0 - 2y_0^2 + 4) + \frac{\partial}{\partial x}(x + y - 2y^2 + 4) \bigg|_0 x + \frac{\partial}{\partial y}(x + y - 2y^2 + 4) \bigg|_0 y = 0 \\ (x_0^2 + y_0^2 - 8) + \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 - 8) \bigg|_0 x + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 - 8) \bigg|_0 y = 0 \\ (3x_0^2 - y_0^2 - 7.7) + \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - y^2 - 7.7) \bigg|_0 x + \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - y^2 - 7.7) \bigg|_0 y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_0 + y_0 - 2y_0^2 + 4) + (1)x + (1 - 4y_0)y = 0 \\ (x_0^2 + y_0^2 - 8) + (2x_0)x + (2y_0)y = 0 \\ (3x_0^2 - y_0^2 - 7.7) + (6x_0)x - (2y_0)y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 7y = 0 \\ 4x + 4y = 0 \\ 0.3 + 12x - 4y = 0 \end{cases}$$

Incluindo resíduos em cada equação, tem-se:

$$\begin{cases} x - 7y = \gamma_1 \\ 4x + 4y = \gamma_2 \\ 12x - 4y + 0.3 = \gamma_3 \end{cases}$$

Aplicando o princípio dos mínimos quadrados, vem $\Phi = \vec{\gamma}^t W \vec{\gamma} = \sum_{i=1}^n (w_i \gamma_i^2)$ mínimo, ou seja,

$$\Phi = (x - 7y)^2 + (4x + 4y)^2 + (12x - 4y + 0.3)^2 \text{ mínimo,}$$

donde

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2(x - 7y) + 2(4x + 4y)4 + 2(12x - 4y + 0.3)12 = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2(x - 7y)(-7) + 2(4x + 4y)4 + 2(12x - 4y + 0.3)(-4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 332x - 78y + 7.2 = 0 \\ -78x + 162y - 2.4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -0.02125000000 \\ y = 0.004583333333 \end{cases}$$

Actualizando o valor da aproximação inicial, $(x_0, y_0) = (2, 2)$ para $(x_0, y_0) = (1.97875, 2.004583333333)$, repete-se o procedimento até se obterem correções ao último valor de (x, y) insignificantes, obtendo-se a solução $(x_0, y_0) = (1.98, 2.01)$ ao fim da terceira iteração.

4. Ajustamento apenas com equações de condição – caso geral ou misto

Neste conjunto de técnicas de ajustamento, os parâmetros, se existirem, são funcionalmente independentes. Em princípio, é possível efectuar o ajustamento utilizando apenas as observações, se bem que em muitos casos é conveniente incluir os parâmetros pois geralmente são precisamente as variáveis que interessa obter. O ajustamento tem início com a especificação do modelo a utilizar, em particular o modelo funcional, através da determinação de n_0 ; dadas n observações, é importante verificar se são suficientes para determinar o modelo; se for esse o caso calcula-se a redundância $r = n - n_0$, que significa que entre as n observações é possível estabelecer $c = r$ equações que verificam o modelo (se $n = n_0$, $r = 0$ e as observações satisfazem o modelo; se $n = n_0 + 1$, $r = 1$ e é necessário escrever uma equação que relacione as n observações, etc.). Considere-se então a existência de parâmetros: se é possível escrever r equações quando não há parâmetros, se se acrescentar ao modelo um parâmetro (desconhecido) podem escrever-se $r + 1$ equações de condição, sendo esta nova equação necessária para a determinação da variável suplementar e para manter a redundância. Havendo u parâmetros independentes no ajustamento, o número de equações de condição é $c = r + u$.

Este caso, como foi dito, é o caso geral; os casos especiais dependem do número u de parâmetros incluídos no ajustamento, ocorrendo o limite inferior quando $u = 0$ e o limite superior quando $u = n_0$ pois neste caso $c = n$ (se u excedesse n_0 , então o número de equações de condição seria maior que o número de observações, o que não é possível a não ser que os parâmetros não sejam independentes).

Resumindo, tem-se então $r \leq c \leq n$, $0 \leq u \leq no$. Havendo assim um total de $c=r+u$ equações lineares ou linearizadas $\vec{F}$, função de $n + u$ incógnitas, cuja forma geral, na forma matricial é $A(\vec{\ell} + \vec{\gamma}) + B\vec{\Delta} = \vec{d}$, onde as matrizes $A = \frac{\partial F}{\partial v}$ e $B = \frac{\partial F}{\partial \Delta}$ contêm os coeficientes nas equações dos resíduos e dos parâmetros, respectivamente, e $\vec{d}$ é o vector de constantes ou, de outra forma,

$$A_{c,n}\vec{v}_{n,1} + B_{c,u}\vec{\Delta}_{u,1} = \vec{f}_{c,1},$$

com $\vec{f} = \vec{d} - A\vec{\ell}$, onde $\vec{\gamma}$ é o vector dos resíduos, $\vec{\Delta}$ o vector dos parâmetros ou das correções aos parâmetros no caso linearizado. Como $c < n + u$, não há uma solução única para a equação anterior; para que isso aconteça é necessário acrescentar o critério dos mínimos quadrados $\Phi = \vec{\gamma}^t W \vec{\gamma} \rightarrow$ mínimo, sendo W a matriz dos pesos das observações.

Para impor o critério dos mínimos quadrados utiliza-se o método dos mínimos condicionados por multiplicadores de Lagrange, representados por $\lambda = -2\vec{k}^t$, sendo o vector $\vec{k}_{c,1}$ (ainda) desconhecido. Assim, pretende-se determinar o mínimo da função $\Phi' = \vec{\gamma}^t W_{\ell} \vec{\gamma} - 2\vec{k}^t (A\vec{\gamma} + B\vec{\Delta} - \vec{f})$, em que $(A\vec{\gamma} + B\vec{\Delta} - \vec{f}) = 0$. Para minimizar Φ' igualam-se a zero as respectivas derivadas em relação a $\vec{\gamma}$ e a $\vec{\Delta}$, isto é:

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial \vec{\gamma}} = 2\vec{\gamma}^t W_{\ell} - 2\vec{k}^t A = \vec{0}^t$$

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial \vec{\Delta}} = -2\vec{k}^t B = \vec{0}^t$$

que com a expressão

$$A\vec{\gamma} + B\vec{\Delta} = \vec{f},$$

constitui o chamado sistema de equações normais.

Para a resolução deste sistema seguem-se os seguintes passos:

- da primeira equação obtém-se o valor de $\vec{\gamma}$:

$$\vec{\gamma}^t W_{\ell} = \vec{k}^t A \Leftrightarrow \vec{\gamma}^t = \vec{k}^t A W_{\ell}^{-1} \Leftrightarrow \vec{\gamma} = (\vec{k}^t A W_{\ell}^{-1})^t = (W_{\ell}^{-1})^t A^t \vec{k} = (W_{\ell}^{-1})^{-1} A^t \vec{k} \Leftrightarrow \vec{\gamma} = W_{\ell}^{-1} A^t \vec{k}$$

- substitui-se $\vec{\gamma}$ na terceira equação e determina-se o valor de $\vec{k}$:

$$A(W_{\ell}^{-1} A^t \vec{k}) + B\vec{\Delta} - \vec{f} = 0 \Leftrightarrow A(W_{\ell}^{-1} A^t \vec{k}) = \vec{f} - B\vec{\Delta} \Leftrightarrow (A W_{\ell}^{-1} A^t) \vec{k} = \vec{f} - B\vec{\Delta} \Leftrightarrow \vec{k} = (A W_{\ell}^{-1} A^t)^{-1} (\vec{f} - B\vec{\Delta})$$

- substitui-se o valor de $\vec{k}$ na expressão de $\vec{\gamma}$:

$$\vec{\gamma} = W_{\ell}^{-1} A^t [(A W_{\ell}^{-1} A^t)^{-1} (\vec{f} - B\vec{\Delta})] \Leftrightarrow \vec{\gamma} = W_{\ell}^{-1} A^t (A W_{\ell}^{-1} A^t)^{-1} (\vec{f} - B\vec{\Delta})$$

- substitui-se o valor de $\vec{k}$ na segunda equação para determinar $\vec{\Delta}$:

$$-2\vec{k}^t B = \vec{0}^t \Leftrightarrow -2[(A W_{\ell}^{-1} A^t)^{-1} (\vec{f} - B\vec{\Delta})]^t B = \vec{0}^t \Leftrightarrow [(A W_{\ell}^{-1} A^t)^{-1} \vec{f} - (A W_{\ell}^{-1} A^t)^{-1} B\vec{\Delta}]^t B = 0 \Leftrightarrow$$

$$[(A W_{\ell}^{-1} A^t)^{-1} \vec{f}]^t B - [(A W_{\ell}^{-1} A^t)^{-1} B\vec{\Delta}]^t B = 0 \Leftrightarrow [(A W_{\ell}^{-1} A^t)^{-1} \vec{f}]^t B = [(A W_{\ell}^{-1} A^t)^{-1} B\vec{\Delta}]^t B \Leftrightarrow$$

$$\{[(A W_{\ell}^{-1} A^t)^{-1} \vec{f}]^t B\}^t = \{[(A W_{\ell}^{-1} A^t)^{-1} B\vec{\Delta}]^t B\}^t \Leftrightarrow B^t [(A W_{\ell}^{-1} A^t)^{-1} \vec{f}] = B^t [(A W_{\ell}^{-1} A^t)^{-1} B\vec{\Delta}] \Leftrightarrow$$

$$B^t[(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}B\vec{\Delta}] = B^t[(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}\vec{f}] \Leftrightarrow [B^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}B]\vec{\Delta} = B^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}\vec{f} \Leftrightarrow$$

$$\vec{\Delta} = [B^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}B]^{-1} [B^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}\vec{f}]$$

ou, pondo $N = B^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}B$ e $\vec{t} = B^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}\vec{f}$ tem-se:

$$\vec{\Delta} = N^{-1}\vec{t}.$$

Resolvido o problema do ajustamento, tem-se:

$$\hat{\vec{\ell}} = \vec{\ell} + \vec{\gamma}.$$

Para além da dedução das expressões que fornecem os valores mais prováveis das grandezas pretendidas, é necessário determinar a precisão de cada uma dessas grandezas. Se a matriz Σ_ℓ de variâncias-covariâncias das observações for conhecida, podem calcular-se os pesos absolutos das observações:

$$W_\ell = \sigma_0^2 \Sigma_\ell^{-1}.$$

Se não for conhecida a matriz de variâncias-covariâncias das observações, é necessário atribuir pesos relativos às observações:

$$W_\ell = \sigma_0^2 \Sigma_\ell^{-1} = Q_\ell^{-1}.$$

Utilizando a fórmula da propagação de variâncias-covariâncias podem obter-se:

- $Q_\Delta = J_{\Delta\ell} Q_\ell J_{\Delta\ell}^t = \frac{\partial \Delta}{\partial \ell} Q_\ell \frac{\partial \Delta}{\partial \ell}^t = \frac{\partial}{\partial \ell} \{N^{-1} [B^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}\vec{f}]\} Q_\ell \frac{\partial}{\partial \ell} \{N^{-1} [B^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}\vec{f}]\}^t =$
 $\frac{\partial}{\partial \ell} \{N^{-1} [B^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}(\vec{d} - A\vec{\ell})]\} Q_\ell \frac{\partial}{\partial \ell} \{N^{-1} [B^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}(\vec{d} - A\vec{\ell})]\}^t =$
 $\frac{\partial}{\partial \ell} \{N^{-1}B^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}\vec{d} - N^{-1}B^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}A\vec{\ell}\} Q_\ell \frac{\partial}{\partial \ell} \{N^{-1}B^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}\vec{d} - N^{-1}B^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}A\vec{\ell}\}^t =$
 $-N^{-1}B^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}A Q_\ell (-N^{-1}B^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}A)^t = -N^{-1}B^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}A W^{-1} (-N^{-1}B^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}A)^t =$
 $-N^{-1}B^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}A W^{-1} [-A^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}B(N^{-1})^t] = -N^{-1}B^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}A W^{-1} (-A^t)(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}B N^{-1} =$
 $N^{-1}B^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}(A W^{-1} A^t)(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}B N^{-1} = N^{-1}B^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}B N^{-1} = N^{-1}NN^{-1} = N^{-1}$
- $Q_Y = J_{Y\ell} Q_\ell J_{Y\ell}^t = Q_\ell A^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}A Q_\ell - Q_\ell A^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}B Q_\Delta B^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}A Q_\ell$
- $Q_{\hat{\ell}} = Q_\ell - Q_Y$
- $Q_f = A Q_\ell A^t$
- $Q_k = (A Q_\ell A^t)^{-1} - (A Q_\ell A^t)^{-1} B N^{-1} B^t (A Q_\ell A^t)^{-1}$

Após a realização do ajustamento obtém-se a variância *a posteriori*, dada por $s_0^2 = \frac{\vec{\gamma}^t W \vec{\gamma}}{\text{redundância}}$. Desta forma tem-se:

- $\Sigma_\Delta = s_0^2 Q_\Delta$
- $\Sigma_{\hat{\ell}} = s_0^2 Q_{\hat{\ell}}$
- $\Sigma_Y = s_0^2 Q_Y$

5. Ajustamento apenas com equações de condição – casos particulares

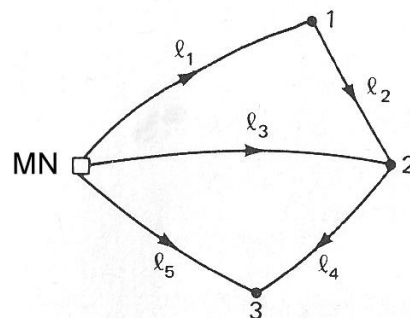
O método dos mínimos quadrados tem sido normalmente aplicado em dois casos particulares, no primeiro as equações de condição contém apenas observações, isto é, $u=0$, e portanto o número de equações a estabelecer é igual à redundância e no segundo cada equação de condição contém apenas uma observação e portanto o número de equações a estabelecer é igual ao número n de observações.

a) Modelo condicional (ajustamento apenas com observações): como não há parâmetros, $u=0$, $\vec{\Delta} = 0$ e $B = 0$ e portanto o caso geral $A\vec{\gamma} + B\vec{\Delta} = \vec{f}$ reduz-se a $A\vec{\gamma} = \vec{f}$, com $\vec{f} = \vec{d} - A\vec{\ell}$, com $c=r$. De forma idêntica, as expressões obtidas para o caso geral reduzem-se a:

- $\vec{k} = (AW_{\ell}^{-1}A^t)^{-1}\vec{f}$
- $\vec{\gamma} = W_{\ell}^{-1}A^t(AW_{\ell}^{-1}A^t)^{-1}\vec{f} = QA^t\vec{k}$
- $Q_{\gamma} = Q_{\ell}A^t(AW_{\ell}^{-1}A^t)^{-1}A Q_{\ell}$
- $Q_{\hat{\ell}} = Q_{\ell} - Q_{\gamma}$

Exemplo: considere-se novamente a rede de nivelamento geométrico representada na figura, que contém a marca de nivelamento MN de altitude conhecida (102.251 m) e os pontos 1, 2 e 3 cujas altitudes x_1 , x_2 e x_3 se pretende determinar, tendo para o efeito sido observados os 5 desníveis $\ell_1=5.011$ m, $\ell_2=2.989$ m, $\ell_3=8.018$ m, $\ell_4=1.009$ m e $\ell_5=8.992$ m.

Para efectuar o transporte da altitude de MN para os pontos 1, 2 e 3 são suficientes 3 desníveis, isto é, o número mínimo de observações (desníveis) que permitem resolver o problema é $n_0=3$. Tendo sido observados $n=5$ desníveis, a redundância é $r=n-n_0=2$ e sendo o número de parâmetros $u=0$, o número de equações que é possível estabelecer entre as 5 observações é $c=r=2$. Considerem-se assim as duas equações de condição seguintes:



$$\begin{cases} \ell_1 + v_1 + \ell_2 + v_2 - \ell_3 - v_3 = 0 \\ \ell_3 + v_3 + \ell_4 + v_4 - \ell_5 - v_5 = 0 \end{cases}$$

ou, na forma matricial, $A\vec{v} = \vec{f}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.018 \\ -0.035 \end{bmatrix}$$

cuja solução é dada por:

$$AP^{-1}A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(AP^{-1}A^T)^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{k} = (AP^{-1}A^T)^{-1}\vec{f} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.018 \\ -0.035 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.002375 \\ -0.010875 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = P^{-1}A^T\vec{k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.002375 \\ -0.010875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.002375 \\ 0.002375 \\ -0.013250 \\ -0.010875 \\ 0.010875 \end{bmatrix}$$

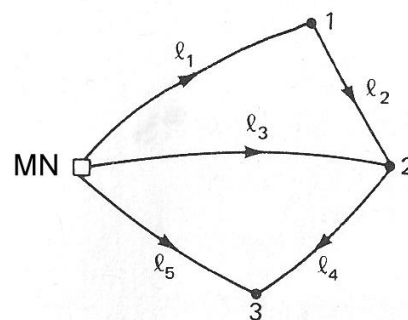
$$\vec{\ell}_a = \vec{\ell}_b + \vec{v} = \begin{bmatrix} 5.013375 \\ 2.991375 \\ 8.004750 \\ 0.998125 \\ 9.002875 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\Delta} = \begin{bmatrix} 102.251 + 5.013375 \\ 102.251 + 8.004750 \\ 102.251 + 9.002875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107.264375 \\ 110.255750 \\ 111.253875 \end{bmatrix} \rightarrow \text{altitudes dos pontos 1, 2 e 3}$$

b) Modelo paramétrico (ajustamento por observações indirectas): neste caso, o ajustamento inclui observações e parâmetros, com a restrição de cada equação conter apenas uma observação, ou seja, o número de equações é $c=n$, $u=n_0$, o que significa que a matriz A é a matriz identidade de ordem n . As equações de condição são dadas por $\vec{\ell} + \vec{\gamma} + B\vec{\Delta} = \vec{d}$ ou $\vec{\gamma} + B\vec{\Delta} = (-\vec{\ell} + \vec{d}) = \vec{f}$. De forma idêntica, as expressões obtidas para o caso geral reduzem-se a:

- $\vec{\gamma} = \vec{f} - B\vec{\Delta}$
- $\vec{\Delta} = N^{-1}\vec{t}$, com $N = B^tW_\ell B$ e $\vec{t} = B^tW_\ell\vec{f}$
- $Q_\Delta = N^{-1}$
- $Q_\gamma = Q_\ell - BN^{-1}B^t$
- $Q_{\hat{\ell}} = Q_\ell - Q_\gamma$

Exemplo: considere-se novamente a rede de nivelamento geométrico representada na figura, que contém a marca de nivelamento MN de altitude conhecida (102.251 m) e os pontos 1, 2 e 3 cujas altitudes x_1 , x_2 e x_3 se pretende determinar, tendo para o efeito sido observados os 5 desníveis $\ell_1=5.011$ m, $\ell_2=2.989$ m, $\ell_3=8.018$ m, $\ell_4=1.009$ m e $\ell_5=8.992$ m.



Para efectuar o transporte da altitude de MN para os pontos 1, 2 e 3 são suficientes 3 desníveis, isto é, o número mínimo de observações (desníveis) que permitem resolver o problema é $n_0=3$. Tendo sido observados $n=5$ desníveis, a redundância é $r=n-n_0=2$ e sendo o número de parâmetros $u=3$, o número de equações que é possível estabelecer entre as 5 observações e os 3 parâmetros é $c=r+u=5$. Considerem-se assim as cinco equações de condição seguintes, onde cada equação contém mais do que uma observação:

$$\begin{cases} MN + \ell_1 + v_1 + \ell_2 + v_2 - x_2 = 0 \\ MN + \ell_3 + v_3 + \ell_4 + v_4 - x_3 = 0 \\ MN + \ell_5 + v_5 - \ell_4 - v_4 - x_2 = 0 \\ MN + \ell_3 + v_3 - \ell_2 - v_2 - x_1 = 0 \\ MN + \ell_5 + v_5 - \ell_4 - v_4 - \ell_2 - v_2 - x_1 = 0 \end{cases} \quad \text{ou, na forma matricial } A\vec{v} + B\vec{\Delta} = \vec{f}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110.251 \\ 111.278 \\ 110.234 \\ 107.280 \\ 107.245 \end{bmatrix}, \text{ cuja solução é dada por:}$$

$$AWA^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(AW^{-1}A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -4 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$N = B(AW^{-1}A^T)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -4 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 0.625 & 0.250 & 0.125 \\ 0.250 & 0.500 & 0.250 \\ 0.125 & 0.250 & 0.625 \end{bmatrix}, \quad \vec{t} = B^T(AW^{-1}A^T)^{-1}\vec{f} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -110.251 \\ -111.278 \\ -110.234 \\ -107.280 \\ -107.245 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 104.273 \\ 112.249 \\ 112.252 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\Delta} = N^{-1}\vec{t} = \begin{bmatrix} 0.625 & 0.250 & 0.125 \\ 0.250 & 0.500 & 0.250 \\ 0.125 & 0.250 & 0.625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 104.273 \\ 112.249 \\ 112.252 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107.264375 \\ 110.255750 \\ 111.253875 \end{bmatrix} \rightarrow \text{altitudes dos pontos 1, 2 e 3}$$

Como era de esperar, obtiveram-se os mesmos valores para os parâmetros (altitudes dos pontos 1, 2 e 3), independentemente do modelo utilizado.

Exemplo: considere-se o problema da determinação da forma de um triângulo plano (2 ângulos, u_1 e u_2), tendo sido observados os três ângulos internos α , β , γ . Neste caso as equações são lineares nos parâmetros (que são as próprias observações ajustadas), tendo-se $n_0=2$, $n=3$, $r=1$, de tal forma, como se viu atrás, $r \leq c \leq n$, $0 \leq u \leq n_0$:

- considerando $u=0$ (**modelo condicional**, cada equação contém apenas observações) vem $c=r+u=1$, isto é,
 $\alpha + v_\alpha + \beta + v_\beta + \gamma + v_\gamma = 180^\circ$ ou $v_\alpha + v_\beta + v_\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta - \gamma$, ou, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ v_\gamma \end{bmatrix} = [180^\circ - \alpha - \beta - \gamma]$$

- considerando $u=1$ (**modelo geral**, cada equação contém observações e parâmetros) vem $c=r+u=2$, isto é,
 $\begin{cases} \alpha + v_\alpha - u = 0 \\ \beta + v_\beta + \gamma + v_\gamma - (180^\circ - u) = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} v_\alpha - u = -\alpha \\ v_\beta + v_\gamma + u = 180^\circ - \beta - \gamma \end{cases}$, ou, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ v_\gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} -\alpha \\ 180^\circ - \beta - \gamma \end{bmatrix}$$

- considerando $u=n_0=2$ (**modelo geral**, cada equação contém observações e parâmetros) vem $c=r+u=3$, isto é,
 $\begin{cases} \alpha + v_\alpha - u_1 = 0 \\ \beta + v_\beta - u_2 = 0 \\ u_1 + \beta + v_\beta = 180^\circ \end{cases}$ ou $\begin{cases} v_\alpha - u_1 = -\alpha \\ v_\beta - u_2 = -\beta \\ v_\beta + v_\gamma + u_1 = 180^\circ - \beta - \gamma \end{cases}$ ou, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ v_\gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ -\beta \\ 180 - \beta - \gamma \end{bmatrix}$$

- considerando $u=n_0=2$ (**modelo paramétrico**, cada equação contém apenas uma observação e parâmetros) vem $c=r+u=3$, isto é,
 $\begin{cases} \alpha + v_\alpha - u_1 = 0 \\ \beta + v_\beta - u_2 = 0 \\ \gamma + v_\gamma - (180^\circ - u_1 - u_2) = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} v_\alpha - u_1 = -\alpha \\ v_\beta - u_2 = -\beta \\ v_\gamma + u_1 + u_2 = 180^\circ - \gamma \end{cases}$ ou, na forma matricial,

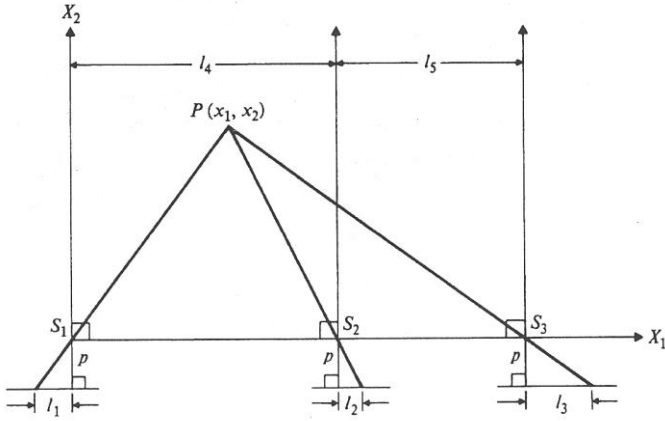
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ v_\gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ -\beta \\ 180 - \gamma \end{bmatrix}$$

Ainda no método paramétrico, este problema pode ser resolvido utilizando um modelo funcional tomando as coordenadas como parâmetros, supondo que há dois pontos fixos, A e B, de coordenadas conhecidas: $n_0=2$, $n=3$, $r=1$, $u=n_0=2$, $c=3$:

$$\begin{cases} \alpha + v_\alpha - R_{AB} + R_{AC} = 0 \\ \beta + v_\beta - R_{BC} + R_{BA} = 0 \\ \gamma + v_\gamma - R_{CA} + R_{CB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_\alpha + R_{AC} = -\alpha + R_{AB} \\ v_\beta - R_{BC} = \beta - R_{BA} \\ v_\gamma - R_{CA} + R_{CB} = -\gamma \end{cases} \quad (\text{estas equações têm que ser linearizadas})$$

O modelo funcional ainda pode ser alterado incluindo observações de distância.

Exemplo: os 3 ângulos internos de um triângulo plano são $\ell_1 = 45^\circ 25' 01''$, $\ell_2 = 65^\circ 20' 00''$, $\ell_3 = 69^\circ 15' 02''$. Obtenha a estimativa por mínimos quadrados dos 3 ângulos supondo que as observações são não correlacionadas e de igual precisão.



Exemplo: a figura (não está à escala) representa um ponto objecto P fotografado a partir de 3 câmaras fotográficas terrestres, localizadas sobre o eixo X_1 do referencial adoptado, coincidindo o eixo X_2 desse referencial com o eixo óptico da câmara localizada em S_1 (os eixos ópticos das 3 câmaras são considerados paralelos e horizontais). Sendo $p=100$ mm e tendo-se medido $l_1=16.5\pm 0.10$ mm, $l_2=3.8\pm 0.10$ mm, $l_3=20.4\pm 0.10$ mm sobre cada uma das imagens e $l_4=10.0\pm 0.05$ m, $l_5=8.0\pm 0.05$ m no terreno, sem correlação entre eles, obtenha as coordenadas do ponto P, assim como a variância a posteriori e as matrizes cofactor e de variância-covariância dos parâmetros e das observações ajustadas.

O primeiro passo consiste em determinar o valor de n_0 , independentemente das observações realizadas. Fixado o referencial com origem em S_1 , são necessárias 2 variáveis para representar as coordenadas de P; para além destas variáveis, sendo o ponto P obtido geometricamente como intersecção de rectas que contêm cada um dos pontos S_1 , S_2 e S_3 , são necessárias outras 2 variáveis para fixar a posição destas duas últimas câmaras no eixo X_1 , ou seja, um total de 4 variáveis que definem a geometria do problema. Tendo sido efectuadas $n=5$ observações, tem-se $r=n-n_0=1$; sendo $u=2$, $c=r+u=3$, isto é, podem ser estabelecidas 3 equações de condição independentes que relacionam as 5 observações e os 2 parâmetros:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\ell_1 + v_1}{p} = \frac{x_1}{x_2} \\ \frac{\ell_2 + v_2}{p} = \frac{\ell_4 + v_4 - x_1}{x_2} \\ \frac{\ell_3 + v_3}{p} = \frac{\ell_4 + v_4 + \ell_5 + v_5 - x_1}{x_2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1 = \ell_1 x_2 + v_1 x_2 - p x_1 = 0 \\ F_2 = \ell_2 x_2 + v_2 x_2 - p \ell_4 - p v_4 + p x_1 = 0 \\ F_3 = \ell_3 x_2 + v_3 x_2 - p \ell_4 - p v_4 - p \ell_5 - p v_5 + p x_1 = 0 \end{array} \right.$$

Linearizando estas equações, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = \ell_1 x_2^0 - p x_1^0 + v_1 x_2^0 - p x_1^0 + \ell_1 x_2^0 = 0 \\ F_2 = \ell_2 x_2 + v_2 x_2 - p \ell_4 - p v_4 + p x_1 = 0 \\ F_3 = \ell_3 x_2 + v_3 x_2 - p \ell_4 - p v_4 - p \ell_5 - p v_5 + p x_1 = 0 \end{array} \right.$$

Pondo $A_{3,5} = \partial F / \partial v$, $B_{3,2} = \partial F / \partial x$, tem-se $A\vec{v} + B\vec{\Delta} = \vec{f}$, com

$$\begin{bmatrix} x_2^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & x_2^0 & -p & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -p & \ell_1 \\ p & \ell_2 \\ p & \ell_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} px_1^0 - \ell_1 x_2^0 \\ p(\ell_4 - x_1^0) - \ell_2 x_2^0 \\ p(\ell_4 + \ell_5 - x_1^0) - \ell_3 x_2^0 \end{bmatrix}.$$

Calculando o valor da aproximação inicial para os parâmetros, tem-se:

$$x_2^0 = \frac{\ell_4 p}{\ell_1 + \ell_2} = \frac{10 \text{ m} \times 100 \text{ mm}}{20.3 \text{ mm}} \approx 49.26108 \text{ m}$$

$$x_1^0 = \frac{\ell_1 x_2^0}{p} = \frac{16.5 \text{ mm} \times 50 \text{ m}}{100 \text{ mm}} \approx 8.12808 \text{ m}.$$

A matriz de variâncias-covariâncias é:

$$\Sigma_{5,5} = \begin{bmatrix} 0.01 \text{ mm}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 \text{ mm}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \text{ mm}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0025 \text{ m}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0025 \text{ m}^2 \end{bmatrix}$$

e, admitindo que a variância *a priori* por unidade de peso $\sigma_0^2 = 1$, tem-se $Q_{5,5} = \sigma_0^2 \Sigma_{5,5}$ ou $Q_{5,5} = \Sigma_{5,5}$; assim:

$$\begin{aligned} N &= B^t(AQA^t)^{-1}B = \begin{bmatrix} -100 & 100 & 100 \\ 16.5 & 3.8 & 20.4 \end{bmatrix} \text{mm} \begin{bmatrix} 0.041209 & 0 & 0 \\ 0 & 0.024479 & -0.008240 \\ 0 & -0.008240 & 0.016239 \end{bmatrix} \text{mm}^{-2} \text{m}^{-2} \begin{bmatrix} -100 & 16.5 \\ 100 & 3.8 \\ 100 & 20.4 \end{bmatrix} \text{mm} \\ &= 100 \begin{bmatrix} 6.544650 & -0.455069 \\ -0.455069 & 0.170530 \end{bmatrix} \text{m}^{-2} \end{aligned}$$

$$\vec{t} = B^t(AQA^t)^{-1}\vec{f} = \begin{bmatrix} -14.184676 \\ -5.319499 \end{bmatrix} \text{m}^{-1}$$

$$\vec{\Delta} = N^{-1}\vec{t} = \begin{bmatrix} -0.053243 \\ -0.454021 \end{bmatrix} \text{m}$$

e portanto $x_1 = 8.074836 \text{ m}$, $x_2 = 48.807062 \text{ m}$. Repetindo o procedimento até o valor absoluto de $\Delta(1)$ e de $\Delta(2)$ ser inferior ao critério de paragem, obtém-se na segunda iteração

$$\vec{\Delta} = N^{-1}\vec{t} = 0.001 \begin{bmatrix} -0.0831194 \\ 0.1238591 \end{bmatrix} \text{m}$$

e portanto $x_1 = 8.074753 \text{ m}$, $x_2 = 48.807186 \text{ m}$.

Para a obtenção do vector dos resíduos, tem-se:

$$\vec{k} = (AQA^t)^{-1}(\vec{f} - B\vec{\Delta}) = [0.090535 \quad 0.201251 \quad -0.110715]^t$$

$$\vec{v} = QA^t\vec{k} = [0.044187 \text{ mm} \quad 0.098224 \text{ mm} \quad -0.054036 \text{ mm} \quad -0.022633 \text{ m} \quad 0.027678 \text{ m}]^t.$$

O vector das observações ajustadas é: $\vec{\ell} = [16.54 \text{ mm} \quad 3.90 \text{ mm} \quad 20.35 \text{ mm} \quad 9.977 \text{ m} \quad 8.028 \text{ m}]^t$.

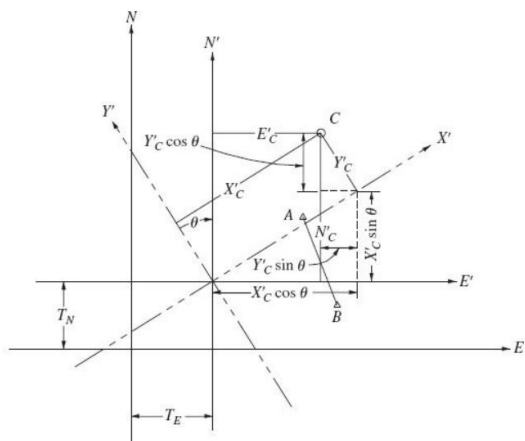
Quanto às matrizes cofactor, tem-se:

$$Q_{\Delta\Delta} = N^{-1} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 1.86 & 5.02 \\ 5.02 & 71.35 \end{bmatrix} \text{m}^2$$

$$Q_{\ell\ell} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 9.024 & -2.189 & 1.213 & 0.500 & -0.621 \\ -2.189 & 5.090 & 2.721 & 1.121 & -1.394 \\ 1.213 & 2.721 & 8.492 & -0.621 & 0.772 \\ 0.500 & 2.721 & -0.621 & 2.244 & 0.318 \\ -0.621 & 1.121 & 0.772 & 0.3318 & 2.104 \end{bmatrix}$$

A variância *a posteriori* por unidade de peso é igual a $\hat{\sigma}_0^2 = 1.9634$, pelos que as matrizes de variâncias-covariâncias dos parâmetros e das observações ajustadas são $\Sigma_{\Delta\Delta} = \hat{\sigma}_0^2 Q_{\Delta\Delta}$ e $\Sigma_{\ell\ell} = \hat{\sigma}_0^2 Q_{\ell\ell}$.

Exemplo: pretende-se determinar os quatro parâmetros (factor de escala, rotação e translação da origem) da transformação conforme no plano entre dois referenciais conhecendo-se as coordenadas (m) de três pontos em ambos os referenciais; para cada um dos três pontos a matriz de variâncias-covariâncias (m²) de cada par de coordenadas no referencial (x,y) é conhecida:



	X	Y	E	N
1	632.17	121.45	1100.64	1431.09
2	355.20	-642.07	1678.39	254.14
3	1304.81	1596.37	138.64	3864.74

$$\Sigma_{XY} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

A transformação do referencial (X,Y) para o referencial (E,N) é dada pelo sistema de equações

$$\begin{cases} E = s X \cos \theta - s Y \sin \theta + T_E \\ N = s X \sin \theta + s Y \cos \theta + T_N \end{cases}$$

onde s é o factor de escala, θ é o ângulo de rotação e T_E , T_N são as componentes da translação da origem. Sendo dadas as coordenadas de três pontos nos dois referenciais, há um total de $n=6$ observações (3×2 pares de coordenadas), o número mínimo de variáveis necessárias para a determinação dos 4 parâmetros é $n_0=4$, donde a redundância é $r=6-4=2$; sendo o número de parâmetros $u=4$, o número de equações de condição é $c=r+u=6$. Pondo $a=s \cos \theta$, $b=s \sin \theta$, tem-se:

$$\begin{cases} (X_1 + \gamma_{X1}) a - (Y_1 + \gamma_{Y1}) b + T_E - E_1 = 0 \\ (Y_1 + \gamma_{Y1}) a + (X_1 + \gamma_{X1}) b + T_N - N_1 = 0 \\ (X_2 + \gamma_{X2}) a - (Y_2 + \gamma_{Y2}) b + T_E - E_2 = 0 \\ (Y_2 + \gamma_{Y2}) a + (X_2 + \gamma_{X2}) b + T_N - N_2 = 0 \\ (X_3 + \gamma_{X3}) a - (Y_3 + \gamma_{Y3}) b + T_E - E_3 = 0 \\ (Y_3 + \gamma_{Y3}) a + (X_3 + \gamma_{X3}) b + T_N - N_3 = 0 \end{cases}$$

Estas equações não são lineares nas variáveis (produtos de parâmetros, senos de parâmetros). Linearizando estas equações da forma

$\vec{F}(\vec{x}^0) + \frac{\partial \vec{F}(\vec{x})}{\partial \vec{x}}|_{\vec{x}=\vec{x}^0} \cdot \Delta(\vec{x}) = 0$, com, por exemplo, $\frac{\partial}{\partial a}((x_1 + \gamma_{x1}) a - (y_1 + \gamma_{y1}) b - x'_1) = x_1 a$, desprezando os produtos de variáveis;

$$\begin{cases} (X_1 + \gamma_{X1}) a^0 - (Y_1 + \gamma_{Y1}) b^0 + T_E^0 - E_1 + X_1 a - Y_1 b + T_E = 0 \\ (Y_1 + \gamma_{Y1}) a^0 + (X_1 + \gamma_{X1}) b^0 + T_N^0 - N_1 + Y_1 a + X_1 b + T_N = 0 \\ (X_2 + \gamma_{X2}) a^0 - (Y_2 + \gamma_{Y2}) b^0 + T_E^0 - E_2 + X_2 a - Y_2 b + T_E = 0 \\ (Y_2 + \gamma_{Y2}) a^0 + (X_2 + \gamma_{X2}) b^0 + T_N^0 - N_2 + Y_2 a + X_2 b + T_N = 0 \\ (X_3 + \gamma_{X3}) a^0 - (Y_3 + \gamma_{Y3}) b^0 + T_E^0 - E_3 + X_3 a - Y_3 b + T_E = 0 \\ (Y_3 + \gamma_{Y3}) a^0 + (X_3 + \gamma_{X3}) b^0 + T_N^0 - N_3 + Y_3 a + X_3 b + T_N = 0 \end{cases}$$

Na forma matricial tem-se $A \vec{\gamma} + B \vec{\Delta} = \vec{f}$, e calculando uma aproximação inicial dos parâmetros com qualquer um dos três pontos conhecidos, tem-se para $a^0=1.1197$ $b^0=1.1629$, $T_E^0=534.0589$, $T_N^0=559.9894$:

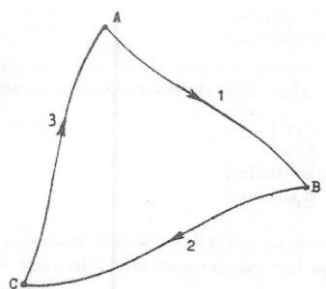
$$A = \begin{bmatrix} a^0 & -b^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b^0 & a^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^0 & -b^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^0 & a^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^0 & -b^0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^0 & a^0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} X_1 & -Y_1 & 1 & 0 \\ Y_1 & X_1 & 0 & 1 \\ X_2 & -Y_2 & 1 & 0 \\ Y_2 & X_2 & 0 & 1 \\ X_3 & -Y_3 & 1 & 0 \\ Y_3 & X_3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} E_1 - X_1 a^0 + Y_1 b^0 - T_E^0 \\ N_1 - Y_1 a^0 - X_1 b^0 - T_N^0 \\ E_2 - X_2 a^0 + Y_2 b^0 - T_E^0 \\ N_2 - Y_2 a^0 - X_2 b^0 - T_N^0 \\ E_3 - X_3 a^0 + Y_3 b^0 - T_E^0 \\ N_3 - Y_3 a^0 - X_3 b^0 - T_N^0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.1197 & -1.1629 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.1629 & 1.1197 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1197 & -1.1629 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1629 & 1.1197 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1197 & -1.1629 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1629 & 1.1197 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 632.17 & -121.45 & 1 & 0 \\ 121.45 & 632.17 & 0 & 1 \\ 355.20 & 642.07 & 1 & 0 \\ -642.07 & 355.20 & 0 & 1 \\ 1304.81 & -1596.37 & 1 & 0 \\ 1596.37 & 1304.81 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} -0.0000 \\ 0.0000 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0102 \\ 0.0758 \end{bmatrix}$$

O processo iterativo converge rapidamente, obtendo-se:

$$\text{delta_ acrescimo} = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ -0.0191 \\ 0.0016 \end{bmatrix}, \quad \text{delta_ acrescimo} = 1.0e - 13 \begin{bmatrix} -0.0008 \\ -0.0022 \\ 0.1524 \\ -0.2893 \end{bmatrix}, \quad \text{delta} = \begin{bmatrix} 1.1197 \\ 1.1629 \\ 534.0398 \\ 559.9909 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} -0.0059 \\ -0.0083 \\ 0.0038 \\ 0.0056 \\ 0.0021 \\ 0.0027 \end{bmatrix}$$

Exemplo: considere-se o exemplo de uma rede de nivelamento em que a altitude H_A do ponto A (5.000 m) é conhecida. Os desníveis observados estão indicados na tabela, considerando-se que a matriz dos pesos é $W=I$. Calcule a altitude ajustada dos pontos B e C.



linha	desnível (m)
1	-0.793
2	-2.310
3	3.106

Pondo

$$\begin{cases} H_A + \ell_1 + v_1 = H_B \\ H_B + \ell_2 + v_2 = H_C \\ H_C + \ell_3 + v_3 = H_A \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 - H_B = -5.000 + 0.793 \\ v_2 + H_B - H_C = 2.310 \\ v_3 + H_C = 5.00 + 3.106 \end{cases} \quad \text{ou, na forma matricial}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_B \\ H_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.207 \\ 2.310 \\ 8.106 \end{bmatrix} \quad \text{tem-se } \vec{\Delta} = \begin{bmatrix} 4.2060 \\ 1.8950 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -0.0010 \\ -0.0010 \\ -0.0010 \end{bmatrix}.$$

Como alternativa, suponha-se que se consideram estimativas *a priori* $H_B^0 = 4.205$ m e $H_C^0 = 1.893$ m, cuja matriz dos pesos é $W = 0.01I$. Obtenha a estimativa por mínimos quadrados das altitudes dos pontos B e C baseadas nestes dados.

As equações que relacionam os parâmetros e as observações são lineares; no entanto é possível linearizar o modelo utilizando as estimativas iniciais para os parâmetros de tal forma que se obtém correcções em vez das altitudes propriamente ditas, ou seja, substitui-se H_B por $H_B + \delta H_B$, sendo H_B o valor inicial da altitude do ponto B:

$$\begin{cases} H_A + \ell_1 + v_1 = H_B^0 + \delta H_B \\ H_B^0 + \delta H_B + \ell_2 + v_2 = H_C^0 + \delta H_C \\ H_C^0 + \delta H_C + \ell_3 + v_3 = H_A \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 - \delta H_B = -5.000 + 0.793 + 4.205 = -0.002 \\ v_2 + \delta H_B - \delta H_C = 1.893 - 4.205 + 2.310 = -0.002 \\ v_3 + \delta H_C = 5.000 - 1.893 - 3.106 = 0.001 \end{cases}$$

ou, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta H_B \\ \delta H_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.000 - 0.793 + 4.205 = -1.588 \\ 1.893 - 4.205 - 2.310 = -4.622 \\ 5.000 - 1.893 + 3.106 = 6.213 \end{bmatrix}$$

e

$$\vec{\Delta} = \begin{bmatrix} 0.0010 \\ 0.0020 \end{bmatrix}, \quad \text{que somado aos valores iniciais fornece } H_B = 4.2050 + 0.0010 = 4.206 \text{ e } H_C = 1.8930 + 0.0020 = 1.8950.$$

RESUMO	Modelo geral ou misto	Modelo condicional	Modelo paramétrico
Modelo não linear	$F(\vec{\ell}, \vec{\Delta}) = 0$	$F(\vec{\ell}) = 0$	$\vec{\ell} = F(\vec{\Delta})$
Especificações		$B=0$	$A=I, r=n$
Modelo linear ou linearizado	$A\vec{\gamma} + B\vec{\Delta} = \vec{f}$	$A\vec{\gamma} = \vec{f}$	$\vec{\gamma} + B\vec{\Delta} = \vec{f}$
Elementos das equações normais	$N = B^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}B$ $\vec{t} = B^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}\vec{f}$		$N = B^tW_\ell B$ $\vec{t} = B^tW_\ell \vec{f}$
Equações normais	$N\vec{\Delta} = \vec{t}$		$N\vec{\Delta} = \vec{t}$
Multiplicadores Lagrange		$\vec{k} = (AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}\vec{f}$	
Parâmetros estimados	$\vec{\Delta} = N^{-1}\vec{t}$		$\vec{\Delta} = N^{-1}\vec{t}$
Resíduos estimados	$\vec{\gamma} = W_\ell^{-1}A^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}(\vec{f} - B\vec{\Delta})$	$\vec{\gamma} = W_\ell^{-1}A^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}\vec{f}$	$\vec{\gamma} = \vec{f} - B\vec{\Delta}$
Variância a posteriori	$s_0^2 = \frac{\vec{\gamma}^t W \vec{\gamma}}{\text{redundância}}$	$s_0^2 = \frac{\vec{\gamma}^t W \vec{\gamma}}{\text{redundância}}$	$s_0^2 = \frac{\vec{\gamma}^t W \vec{\gamma}}{\text{redundância}}$
Observações ajustadas	$\hat{\vec{\ell}} = \vec{\ell} + \vec{\gamma}$	$\hat{\vec{\ell}} = \vec{\ell} + \vec{\gamma}$	$\hat{\vec{\ell}} = \vec{\ell} + \vec{\gamma}$
Matriz cofactor dos parâmetros	$Q_\Delta = N^{-1}$		$Q_\Delta = N^{-1}$
Matriz cofactor dos resíduos	$Q_\gamma = W_\ell^{-1}A^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}((AW_\ell^{-1}A^t) - BN^{-1}B^t)(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}AW_\ell^{-1}$	$Q_\gamma = Q_\ell A^t(AW_\ell^{-1}A^t)^{-1}A Q_\ell$	$Q_\gamma = Q_\ell - BN^{-1}B^t$
Matriz cofactor das observações ajustadas	$Q_{\hat{\ell}} = Q_\ell - Q_\gamma$	$Q_{\hat{\ell}} = Q_\ell - Q_\gamma$	$Q_{\hat{\ell}} = Q_\ell - Q_\gamma$

6. Teste do qui-quadrado

A utilização de uma estimativa só tem significado quando tem associada uma medida da respectiva incerteza. Na utilização de testes de hipóteses, estabelece-se uma hipótese *a priori* baseada nalguma estatística da amostra, resultando da aplicação do teste a aceitação ou rejeição dessa hipótese. Designa-se por hipótese nula, representada por H_0 , a hipótese que se pretende validar e por H_1 a hipótese ou hipóteses alternativas, sendo necessário:

- formular a regra de decisão do teste, que determina qual é a hipótese nula e a hipótese alternativa,
- selecionar a variável aleatória que vai ser objecto do teste, assim como a respectiva distribuição de probabilidade,
- selecionar o nível de confiança ou grau de confiança γ do teste.

Dos resultados possíveis do teste, i) H_0 é verdadeira e o teste conduz à sua aceitação, ii) H_0 é verdadeira e o teste conduz à sua rejeição, iii) H_0 é falsa e o teste conduz à sua rejeição, iv) H_0 é falsa e o teste conduz à sua aceitação, ou seja:

	Decisão	
	H_0 aceite	H_0 rejeitada
H_0 verdadeira	$1-\alpha$	α
H_0 falsa	β	$1-\beta$

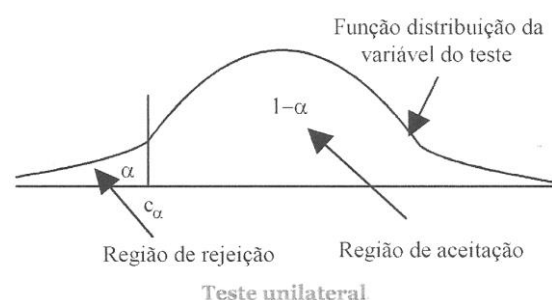
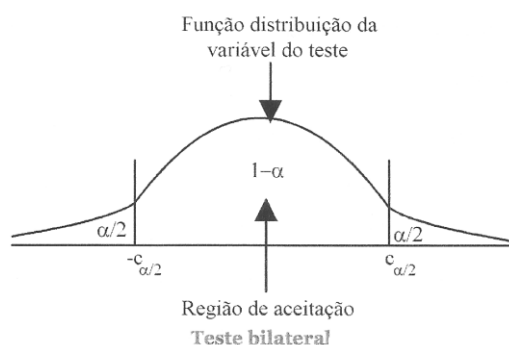
verifica-se que a decisão de aceitação ou de rejeição da hipótese nula apresenta um risco associado; designa-se por nível de significância do teste, α , à probabilidade de rejeitar erroneamente a hipótese verdadeira, decisão que conduz a um erro do tipo I ou de primeira espécie, sendo os níveis de significância mais utilizados 5% e 1%.

Tem-se assim que a probabilidade de aceitar correctamente a hipótese nula ou nível de confiança é $\gamma=1-\alpha$. A probabilidade de aceitar erradamente a hipótese falsa, β , conduz a um erro do tipo II ou de segunda espécie, designando-se $(1-\beta)$ por potência do teste, isto é, a probabilidade de rejeitar correctamente a hipótese falsa.

Considere-se uma amostra aleatória de dimensão n de uma população com distribuição normal. Pretende-se testar a hipótese nula $\sigma^2=\sigma_0^2$ contra as hipóteses alternativas $\sigma^2\neq\sigma_0^2$, $\sigma^2>\sigma_0^2$ e $\sigma^2<\sigma_0^2$. Utiliza-se para o efeito o teste do qui-quadrado baseado na variância s^2 da amostra, onde m é o número de graus de liberdade; sendo α o nível de significância adoptado, os três testes pretendidos são:

1. $H_0: \sigma^2=\sigma_0^2; H_1: \sigma^2\neq\sigma_0^2 \Rightarrow$ rejeitar H_0 quando $\chi_r^2 < \chi_{1-\frac{\alpha}{2},r}^2$ ou $\chi_r^2 > \chi_{\frac{\alpha}{2},r}^2$ pois $P\left\{\chi_{1-\frac{\alpha}{2},r}^2 < \frac{rs^2}{\sigma_0^2} < \chi_{\frac{\alpha}{2},r}^2\right\} = 1 - \alpha$
2. $H_0: \sigma^2=\sigma_0^2; H_1: \sigma^2<\sigma_0^2 \Rightarrow$ rejeitar H_0 quando $\chi_r^2 < \chi_{1-\alpha,r}^2$ pois $P\left\{\frac{rs^2}{\sigma_0^2} < \chi_{\alpha,r}^2\right\} = \alpha$
3. $H_0: \sigma^2=\sigma_0^2; H_1: \sigma^2>\sigma_0^2 \Rightarrow$ rejeitar H_0 quando $\chi_r^2 > \chi_{1-\alpha,r}^2$ pois $P\left\{\frac{rs^2}{\sigma_0^2} > \chi_{\alpha,r}^2\right\} = \alpha$

O primeiro caso representa um teste bilateral enquanto que os dois casos seguintes representam testes unilaterais:



Após a realização do ajustamento, obtém-se o valor estimado de σ_0^2 , com base nas observações e na matriz dos pesos, que se designa por variância *a posteriori* por unidade de peso, s_0^2 , que deve ser estatisticamente semelhante a σ_0^2 para o ajustamento ser aceite (através do teste do qui-quadrado da razão de variâncias). Normalmente atribui-se a σ_0^2 o valor 1, ou seja, a matriz dos pesos coincide com o inverso da matriz de variâncias-covariâncias das observações. Caso o teste seja rejeitado é necessário investigar a razão: existência de erros grosseiros ou sistemáticos nas observações, erro nos cálculos, modelo funcional inadequado, modelo estocástico errado, etc.

Exemplo: dada uma amostra de dimensão $n=12$ cuja variância é $s^2=0.07$, teste a hipótese que a variância da população é $\sigma_0^2 = 0.10$ contra a hipótese alternativa que $\sigma_0^2 < 0.10$ com o nível de significância $\alpha=0.05$.

$$\chi_m^2 = \frac{ms^2}{\sigma_0^2} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{11 \times 0.07}{0.10} = 7.7$$

A hipótese nula $\sigma_0^2 = 0.10$ deve ser rejeitada se $\chi_m^2 = 7.7 < \chi_{1-\alpha, m}^2 = \chi_{0.95, 11}^2 = 4.57$, o que não se verifica pelo que a hipótese nula não deve ser rejeitada.

7. Solução sequencial

Supondo agora que as observações são processadas em dois conjuntos $\vec{\ell}_1$ e $\vec{\ell}_2$ (sem observações em comum), o segundo contendo uma ou mais observações mas de forma a que os parâmetros sejam comuns, os dois modelos de ajustamento geral são dados por:

$$\begin{cases} \vec{F}_1(\vec{\ell}_1, \vec{x}_a) = 0 \\ \vec{F}_2(\vec{\ell}_2, \vec{x}_a) = 0 \end{cases}$$

Os dois conjuntos de observações devem ser não correlacionados e a variância *a priori* por unidade de peso deve ser igual para ambos os conjuntos, isto é

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \Sigma_1^{-1} & 0 \\ 0 & \Sigma_2^{-1} \end{bmatrix}$$

O número de observações em $\vec{\ell}_1$ e em $\vec{\ell}_2$ é n_1 e n_2 , respectivamente, sendo o número de equações em cada modelo igual a c_1 e c_2 , respectivamente. A forma linearizada dos dois modelos é dada por

$$\begin{cases} A_1 \vec{v}_1 + B_1 \delta \vec{x} = \vec{f}_1 \\ A_2 \vec{v}_2 + B_2 \delta \vec{x} = \vec{f}_2 \end{cases}$$

onde

$$A_1 = \frac{\partial \vec{F}_1}{\partial \vec{\ell}_1} \Big|_{\vec{\ell}_{1b}, \vec{x}_0}, \quad A_2 = \frac{\partial \vec{F}_2}{\partial \vec{\ell}_2} \Big|_{\vec{\ell}_{2b}, \vec{x}_0}, \quad B_1 = \frac{\partial \vec{F}_1}{\partial \vec{x}} \Big|_{\vec{\ell}_{1b}, \vec{x}_0}, \quad B_2 = \frac{\partial \vec{F}_2}{\partial \vec{x}} \Big|_{\vec{\ell}_{2b}, \vec{x}_0}, \quad \vec{f}_1 = \vec{F}_1(\vec{\ell}_1, \vec{x}_0), \quad \vec{f}_2 = \vec{F}_2(\vec{\ell}_2, \vec{x}_0).$$

A função a ser minimizada neste caso é:

$$\varphi(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{k}_1, \vec{k}_2, \delta\vec{x}) = \vec{v}_1^T P \vec{v}_1 + \vec{v}_2^T P \vec{v}_2 - 2\vec{k}_1^T (A_1 \vec{v}_1 + B_1 \delta\vec{x} - \vec{f}_1) - 2\vec{k}_2^T (A_2 \vec{v}_2 + B_2 \delta\vec{x} - \vec{f}_2)$$

cuja derivadas parciais são:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{v}_1} \right)^T = P_1 \vec{v}_1 - A_1^T \vec{k}_1 = 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{v}_2} \right)^T = P_2 \vec{v}_2 - A_2^T \vec{k}_2 = 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \delta\vec{x}} \right)^T = -B_1^T \vec{k}_1 - B_2^T \vec{k}_2 = 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{k}_1} \right)^T = A_1 \vec{v}_1 + B_1 \delta\vec{x} - \vec{f}_1 = 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{k}_2} \right)^T = A_2 \vec{v}_2 + B_2 \delta\vec{x} - \vec{f}_2 = 0 \end{cases}$$

Das duas primeiras equações obtêm-se os resíduos:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = P_1^{-1} A_1^T \vec{k}_1 \\ \vec{v}_2 = P_2^{-1} A_2^T \vec{k}_2 \end{cases}$$

Combinando $P_1 \vec{v}_1 - A_1^T \vec{k}_1 = 0$ e $A_1 \vec{v}_1 + B_1 \delta\vec{x} - \vec{f}_1 = 0$ obtém-se $M_1 \vec{k}_1 + B_1 \delta\vec{x} - \vec{f}_1 = 0$, onde $M_1 = A_1 P_1^{-1} A_1^T$ é uma matriz simétrica $c_1 \times c_1$. O vector dos multiplicadores de Lagrange é dado pela expressão $\vec{k}_1 = -M_1^{-1} B_1 \delta\vec{x} + M_1^{-1} \vec{f}_1$. As equações $-B_1^T \vec{k}_1 - B_2^T \vec{k}_2 = 0$ e $A_2 \vec{v}_2 + B_2 \delta\vec{x} - \vec{f}_2 = 0$, após combinação com as equações $\vec{k}_1 = -M_1^{-1} B_1 \delta\vec{x} + M_1^{-1} \vec{f}_1$ e $\vec{v}_2 = P_2^{-1} A_2^T \vec{k}_2$, permitem obter

$$\begin{cases} B_1^T M_1^{-1} B_1 \delta\vec{x} - B_1^T M_1^{-1} \vec{f}_1 - B_2^T \vec{k}_2 = 0 \\ A_2 P_2^{-1} A_2^T \vec{k}_2 + B_2 \delta\vec{x} - \vec{f}_2 = 0 \end{cases}$$

Utilizando $M_2 = A_2 P_2^{-1} A_2^T$, as expressões anteriores têm a forma

$$\begin{bmatrix} B_1^T M_1^{-1} B_1 & B_2^T \\ B_2 & -M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\vec{x} \\ -\vec{k}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1^T M_1^{-1} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \end{bmatrix}$$

que mostra a forma como a matriz normal do primeiro conjunto de observações ($B_1^T M_1^{-1} B_1$) tem que ser ampliada de forma a ser possível obter a solução para os dois conjuntos. Invertendo essa matriz ampliada, obtém-se a solução para $\delta\vec{x}$ e para $\vec{k}_2$.

Exemplo: utilizando a mesma rede de nivelamento do caso já estudado, considerem-se os dois conjuntos de observações $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4\}$ e $\{\ell_5\}$, com os quais se podem definir os seguintes dois modelos, respectivamente com $n_1 = 4$, $r_1 = 4 - 3 = 1$, $c_1 = r_1 + u = 1 + 3 = 4$ (com o qual se pode obter uma solução) e $n_2 = 1$, $r_2 = 1 - 3 = -2$, $c_2 = r_2 + u = -2 + 3 = 1$:

$$\begin{cases} MN + \ell_1 + v_1 + \ell_2 + v_2 - x_2 = 0 \\ MN + \ell_3 + v_3 + \ell_4 + v_4 - x_3 = 0 \\ MN + \ell_3 + v_3 - x_2 = 0 \\ MN + \ell_3 + v_3 - \ell_2 - v_2 - x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\{MN + \ell_5 + v_5 - x_3 = 0\}$$

ou, na forma matricial,

$$\begin{cases} A_1 \vec{v}_1 + B_1 \vec{x} = \vec{f}_1 = 0 \\ A_2 \vec{v}_2 + B_2 \vec{x} = \vec{f}_2 = 0 \end{cases}$$

em que

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \vec{f}_1 = - \begin{bmatrix} MN + \ell_1 + \ell_2 \\ MN + \ell_3 + \ell_4 \\ MN + \ell_3 \\ MN - \ell_2 + \ell_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 110.251 \\ 111.278 \\ 110.269 \\ 107.280 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = [1] = 1, \vec{v}_2 = [v_5] = v_5, B_2 = [0 \quad 0 \quad -1], \vec{f}_2 = -[MN + \ell_5] = -[111.243] = -111.243.$$

O primeiro conjunto de observações pode ser utilizado para obter uma solução para os parâmetros:

$$M_1 = A_1 P_1^{-1} A_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = B M_1^{-1} B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N_1^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{t}_1 = B_1^T M_1^{-1} \vec{f}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 110.251 \\ 111.278 \\ 110.269 \\ 107.280 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -104.273 \\ -112.249 \\ -1.009 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\Delta} = -N_1^{-1} \vec{t}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -104.273 \\ -112.249 \\ -1.009 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107.268 \\ 110.263 \\ 111.272 \end{bmatrix} \rightarrow \text{altitudes dos pontos 1, 2 e 3}$$

O resultado é naturalmente diferente pois agora não se utilizou a totalidade da informação então disponível (os 5 desníveis); incluindo nesta solução a informação correspondente ao segundo conjunto de dados, recorrendo a

$$\begin{bmatrix} B_1^T M_1^{-1} B_1 & B_2^T \\ B_2 & -M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x} \\ -\vec{k}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1^T M_1^{-1} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \end{bmatrix} \quad \text{com } M_2 = A_2 P_2^{-1} A_2^T = [1] = 1, \text{ tem-se:}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{x} \\ -\vec{k}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1^T M_1^{-1} B_1 & B_2^T \\ B_2 & -M_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1^T M_1^{-1} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 104.273 \\ 112.249 \\ 1.009 \\ -111.243 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.625 & 0.250 & 0.125 & -0.125 \\ 0.250 & 0.500 & 0.250 & -0.250 \\ 0.125 & 0.250 & 0.625 & -0.625 \\ -0.125 & -0.250 & -0.625 & -0.375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 104.273 \\ 112.249 \\ 1.009 \\ -111.243 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107.264375 \\ 110.255750 \\ 111.253875 \\ -0.010875 \end{bmatrix} \rightarrow \text{altitudes dos pontos 1, 2 e 3 e } k_2$$

obtendo-se a mesma solução anteriormente determinada.

Pode igualmente utilizar-se um procedimento de particionamento para se obter a solução pretendida; de

$$\begin{cases} \delta \vec{x} = Q_{11} B_1^T M_1^{-1} \vec{f}_1 + Q_{12} \vec{f}_2 \\ \vec{k}_2 = -Q_{21} B_1^T M_1^{-1} \vec{f}_1 - Q_{22} \vec{f}_2 \end{cases} \quad \text{onde}$$

$$Q_{11} = (B_1^T M_1^{-1} B_1)^{-1} - (B_1^T M_1^{-1} B_1)^{-1} B_2^T (M_2 + B_2 (B_1^T M_1^{-1} B_1)^{-1} B_2^T)^{-1} B_2 (B_1^T M_1^{-1} B_1)^{-1},$$

$$Q_{12} = (B_1^T M_1^{-1} B_1)^{-1} B_2^T (M_2 + B_2 (B_1^T M_1^{-1} B_1)^{-1} B_2^T)^{-1}$$

$$Q_{21} = Q_{12}^T$$

$$Q_{22} = -(M_2 + B_2 (B_1^T M_1^{-1} B_1)^{-1} B_2^T)^{-1}$$

tem-se, por substituição de Q_{11} e Q_{12} em $\delta \vec{x} = Q_{11} B_1^T M_1^{-1} \vec{f}_1 + Q_{12} \vec{f}_2$ a solução sequencial para os parâmetros: representando a solução do primeiro conjunto por $\delta \vec{x}^*$ e a contribuição do segundo conjunto por $\Delta \vec{x}$, tal que $\delta \vec{x} = \delta \vec{x}^* + \Delta \vec{x}$, então:

$$\begin{cases} \delta \vec{x}^* = -N_1^{-1} U_1 = (B_1^T M_1^{-1} B_1)^{-1} B_1^T M_1^{-1} \vec{f}_1 \\ \Delta \vec{x} = -(B_1^T M_1^{-1} B_1)^{-1} B_2^T (M_2 + B_2 (B_1^T M_1^{-1} B_1)^{-1} B_2^T)^{-1} (B_2 \delta \vec{x}^* - \vec{f}_2) \end{cases}$$

e, de forma idêntica

$$\vec{k}_2 = -(M_2 + B_2 (B_1^T M_1^{-1} B_1)^{-1} B_2^T)^{-1} (B_2 \delta \vec{x}^* - \vec{f}_2).$$

Exemplo: como já se viu, a solução do primeiro conjunto de observações é

$$\vec{x}^* = -N_1^{-1}U_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -104.273 \\ -112.249 \\ -1.009 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107.268 \\ 110.263 \\ 111.272 \end{bmatrix}.$$

A contribuição do segundo conjunto de dados para a solução é:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{x} &= -(B_1^T M_1^{-1} B_1)^{-1} B_2^T (M_2 + B_2 (B_1^T M_1^{-1} B_1)^{-1} B_2^T)^{-1} (B_2 \vec{x}^* - \vec{f}_2) = \\ &= - \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \left(1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 107.268 \\ 110.263 \\ 111.272 \end{bmatrix} + 111.243 \right) = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} \left(1 + \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} (-111.272 + 111.243) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} \left(1 + \frac{5}{3} \right)^{-1} (-0.029) = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} \frac{3}{8} (-0.029) = \begin{bmatrix} -0.003625 \\ -0.007250 \\ -0.018125 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

de tal forma que a solução completa é dada por

$$\vec{x} = \vec{x}^* + \Delta \vec{x} = \begin{bmatrix} 107.268 \\ 110.263 \\ 111.272 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.003625 \\ -0.007250 \\ -0.018125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107.264375 \\ 110.255750 \\ 111.253875 \end{bmatrix} \rightarrow \text{altitudes dos pontos 1, 2 e 3}$$

Uma forma alternativa para a solução de

$$\begin{bmatrix} B_1^T M_1^{-1} B_1 & B_2^T \\ B_2 & -M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \vec{x} \\ -\vec{k}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1^T M_1^{-1} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \end{bmatrix}$$

consiste em utilizar a expressão

$$\delta \vec{x} = -(B_1^T M_1^{-1} B_1 + B_2^T M_2^{-1} B_2)^{-1} (-B_1^T M_1^{-1} \vec{f}_1 - M_2^{-1} \vec{f}_2),$$

que se designa por método de adição de equações normais, uma vez que a contribuição de novas observações é adicionada de forma simples.

Exemplo: utilizando a última expressão, mais uma vez com a mesma rede de nivelamento:

$$\vec{X} = - \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} -104.273 \\ -112.249 \\ -1.009 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -111.243 \end{bmatrix} \right) =$$

$$- \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 104.273 \\ 112.249 \\ 112.252 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 104.273 \\ 112.249 \\ 112.252 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0.625 & 0.250 & 0.125 \\ 0.250 & 0.500 & 0.250 \\ 0.125 & 0.250 & 0.625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 104.273 \\ 112.249 \\ 112.252 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107.264375 \\ 110.255750 \\ 111.253875 \end{bmatrix} \rightarrow \text{altitudes dos pontos 1, 2 e 3}$$

Relacionando a expressão $\delta\vec{x} = -(B_1^T M_1^{-1} B_1 + B_2^T M_2^{-1} B_2)^{-1} (-B_1^T M_1^{-1} \vec{f}_1 - B_2^T M_2^{-1} \vec{f}_2)$ com Q_{11} , obtém-se:

$$Q_{\delta\vec{x}} = Q_{11} = (B_1^T M_1^{-1} B_1 + B_2^T M_2^{-1} B_2)^{-1} =$$

$$(B_1^T M_1^{-1} B_1)^{-1} - (B_1^T M_1^{-1} B_1)^{-1} B_2^T (M_2 + B_2 (B_1^T M_1^{-1} B_1)^{-1} B_2^T)^{-1} B_2 (B_1^T M_1^{-1} B_1)^{-1} =$$

$$Q_{\delta\vec{x}^*} - Q_{\delta\vec{x}^*} B_2^T (M_2 + B_2 Q_{\delta\vec{x}^*} B_2^T)^{-1} B_2 Q_{\delta\vec{x}^*} = Q_{\delta\vec{x}^*} + \Delta Q_{\delta\vec{x}}$$

onde $Q_{\delta\vec{x}^*}$ é a matriz cofactor do primeiro conjunto de observações e $\Delta Q_{\delta\vec{x}} = -Q_{\delta\vec{x}^*} B_2^T (M_2 + B_2 Q_{\delta\vec{x}^*} B_2^T)^{-1} B_2 Q_{\delta\vec{x}^*}$ é a contribuição do segundo conjunto de observações para a matriz cofactor do primeiro grupo de observações, podendo verificar-se que $\Delta Q_{\delta\vec{x}}$ pode ser calculado sem dispor do segundo conjunto de observações, o que é uma grande vantagem em estudos de simulação.

Atendendo a que $\vec{v}^T P \vec{v} = \vec{v}_1^T P \vec{v}_1 + \vec{v}_2^T P \vec{v}_2 = \vec{k}_1^T \vec{f}_1 + \vec{k}_2^T \vec{f}_2$, utilizando os resultados obtidos anteriormente, tem-se:

$$\vec{v}^T P \vec{v} = -\delta\vec{x}^* B_1^T M_1^{-1} \vec{f}_1 - \Delta\vec{x}^T B_1^T M_1^{-1} \vec{f}_1 + \vec{f}_1^T M_1^{-1} \vec{f}_1 + \vec{k}_2^T \vec{f}_2 = \vec{v}^T P \vec{v}^* - \Delta\vec{x}^T B_1^T M_1^{-1} \vec{f}_1 + \vec{k}_2^T \vec{f}_2 =$$

$$= \vec{v}^T P \vec{v}^* + (B_2 \delta\vec{x}^* - \vec{f}_2)^T (M_2 + B_2 (B_1^T M_1^{-1} B_1)^{-1} B_2^T)^{-1} (B_2 \delta\vec{x}^* - \vec{f}_2) = \vec{v}^T P \vec{v}^* + \Delta\vec{v}^T P \vec{v}$$

A variância *a posteriori* por unidade de peso é calculada de forma usual: $s_0^2 = \frac{\vec{v}^T P \vec{v}}{c_1 + c_2 - u}$.

De $\vec{v}_1 = \vec{v}_1^* + \Delta\vec{v}_1 = -P_1^{-1} A_1^T M_1^{-1} (B_1 (\delta\vec{x}^* + \Delta\vec{x}) - \vec{f}_1) = -P_1^{-1} A_1^T M_1^{-1} (B_1 \delta\vec{x}^* - \vec{f}_1) - P_1^{-1} A_1^T M_1^{-1} B_1 \Delta\vec{x}$, tem-se que

$\vec{v}_2 = -P_2^{-1} A_2^T T (B_2 \delta\vec{x}^* - \vec{f}_2)$, onde $T = (M_2 + B_2 N_1^{-1} B_2^T)^{-1}$ e $N_1 = B_1^T M_1^{-1} B_1$, contribuindo o segundo conjunto de observações para a totalidade dos resíduos. Note-se que as diversas matrizes devem ser calculadas para os mesmos parâmetros aproximados, isto é, se se obtiver a solução do primeiro sistema através de um processo iterativo, os parâmetros aproximados da última iteração têm que ser utilizados na resolução do segundo sistema (como não há observações comuns aos dois conjuntos, os processos iterativos podem ser efectuados individualmente em cada conjunto).

Ocasionalmente, pode ser desejável remover um conjunto de observações de um dado ajustamento. Considerando o caso de observações não correlacionadas, a solução obtém-se de $\delta\vec{x} = -(B_1^T M_1^{-1} B_1 + B_2^T M_2^{-1} B_2)^{-1} (-B_1^T M_1^{-1} \vec{f}_1 - B_2^T M_2^{-1} \vec{f}_2)$, expressão que mostra a forma como é possível acrescentar equações normais quando um novo conjunto de observações é incluído. Quando se trata de remover observações, as partes correspondentes da matriz normal e do segundo membro têm de ser subtraídas.

8. Equações de constrangimento

Uma equação de constrangimento relaciona parâmetros entre si e a sua presença no modelo funcional implica que os parâmetros são funcionalmente dependentes, situação que ocorre quando alguns ou a totalidade dos parâmetros têm que verificar alguma condição geométrica ou física (por exemplo, impor que pontos na linha de costa de um lago tenham a mesma altitude ou que a distância ou a direcção entre dois pontos permaneça inalterada). Esta dependência funcional dos parâmetros significa que há tantos parâmetros dependentes como o número de equações de constrangimento: sendo n o número de observações e n_0 o número de variáveis que determinam o modelo, tem-se que podem ser escritas $r=n-n_0$ equações independentes contendo apenas observações; existindo u' parâmetros independentes, o número de equações de condição que relacionam as n observações e os u' parâmetros aumenta para $c=r+u' \leq n$. Se o número total de parâmetros for $u > u'$, há $s=u-u' < u$ parâmetros dependentes, em que $s < u$ para o conjunto de equações de constrangimento não ser inconsistente. Uma vez que o número de constrangimentos é igual ao número de parâmetros dependentes tem-se $c+s=r+u$. O número de equações de condição continua a não poder exceder o número de observações ($r \leq c \leq n$); no entanto a limitação colocada no número de parâmetros quando estes são funcionalmente independentes ($0 \leq u \leq n_0$) não se verifica agora, ou seja, pode não existir limite superior para o número de parâmetros quando estes são funcionalmente dependentes (u pode exceder n_0), desde que se verifique a relação $c+s=r+u$.

O caso geral para o justamento de equações de condição e de constrangimento obtém-se das equações

$$A_{c,n} \vec{v}_{n,1} + B_{c,u} \vec{\Delta}_{u,1} = \vec{f}_{c,1}$$

$$C_{s,u} \vec{\Delta}_{u,1} = \vec{g}_{s,1}$$

com característica(A)= c , característica(B)= u , característica(C)= s , sendo a característica de uma matriz o número de linhas ou colunas linearmente independentes dessa matriz. No caso mais geral, é possível que $u > c$, tornando característica(B)= c . Vai ser tratado em primeiro lugar o caso $u < c$, onde há dois procedimentos possíveis:

a) **Procedimento directo:** existindo dois conjuntos separados de equações, são necessários dois vectores de multiplicadores de Lagrange para utilizar a técnica de minimização, $\vec{k}_{c,1}$ e $\vec{k}_{s,1}^c$, sendo $\Phi = \vec{v}^t W \vec{v} - 2 \vec{k}^t (A \vec{v} + B \vec{\Delta} - \vec{f}) - 2 \vec{k}_c^t (C \vec{\Delta} - \vec{g})$, a forma quadrática a ser minimizada, tendo-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{v}} = 2 \vec{v}^t W - 2 \vec{k}^t A = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{\Delta}} = 2 \vec{k}^t B - 2 \vec{k}_c^t C = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -W \vec{v} + A^t \vec{k} = 0 \\ B^t \vec{k} + C^t \vec{k}_c = 0 \end{cases}$$

que representam um conjunto de $n+u$ equações lineares que quando combinadas com as equações iniciais $A_{c,n} \vec{v}_{n,1} + B_{c,u} \vec{\Delta}_{u,1} = \vec{f}_{c,1}$ e $C_{s,u} \vec{\Delta}_{u,1} = \vec{g}_{s,1}$ dão um total de $n+c+u+s$ equações com o mesmo número de incógnitas, $\vec{v}_{n,1}$, $\vec{k}_{c,1}$, $\vec{\Delta}_{u,1}$ e $\vec{k}_{s,1}^c$. Os quatro conjuntos de equações combinados constituem o sistema de equações normais

$$\begin{bmatrix} -W & A^t & 0 & 0 \\ A & 0 & B & 0 \\ 0 & B^t & 0 & C^t \\ 0 & 0 & C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{k} \\ \vec{\Delta} \\ \vec{k}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{f} \\ 0 \\ \vec{g} \end{bmatrix}$$

cuja solução é

$$\begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{k} \\ \vec{\Delta} \\ \vec{k}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -W & A^t & 0 & 0 \\ A & 0 & B & 0 \\ 0 & B^t & 0 & C^t \\ 0 & 0 & C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{f} \\ 0 \\ \vec{g} \end{bmatrix}$$

tendo esta matriz característica $n+c+u+s$, sendo portanto não singular (regular), podendo eventuais problemas com a respectiva inversão estar relacionados com o modelo matemático estar mal formulado, em particular o modelo funcional, com as equações de condição e de constrangimento não correctamente estabelecidas. Em qualquer dos casos esta matriz tem normalmente uma dimensão grande; dos quatro vectores incógnita, apenas $\vec{\Delta}$ e talvez $\vec{v}$, tenham maior interesse, podendo então obter-se a respectiva expressão através de uma solução por particionamento:

- de $-W\vec{v} + A^t\vec{k} = 0$ tem-se que $\vec{v} = W^{-1}A^t\vec{k} = QA^t\vec{k}$
- de $A\vec{v} + B\vec{\Delta} = \vec{f}$ tem-se que $\vec{k} = (AQ^tA^t)^{-1}(-B\vec{\Delta} + \vec{f}) = W(-B\vec{\Delta} + \vec{f})$
- de $B^t\vec{k} + C^t\vec{k}_c = 0$ tem-se que $-(B^tWB)\vec{\Delta} + B^tW\vec{f} + C^t\vec{k}_c = 0$ ou $-N\vec{\Delta} + C^t\vec{k}_c = -\vec{t}$

Resolvendo para $\vec{\Delta}$ e $\vec{k}_c$ as equações $-N\vec{\Delta} + C^t\vec{k}_c = -\vec{t}$ e $C\vec{\Delta} = \vec{g}$, obtém-se

- $\vec{k}_c = (CN^{-1}C^t)^{-1}(\vec{g} - CN^{-1}\vec{t}) = M^{-1}(\vec{g} - CN^{-1}\vec{t})$
- $\vec{\Delta} = N^{-1}(\vec{t} + C^t\vec{k}_c) = N^{-1}\vec{t} + N^{-1}C^t\vec{k}_c = \vec{\Delta}_0 + \delta\vec{\Delta}$

onde $M = CN^{-1}C^t$, $\vec{\Delta}_0 = N^{-1}\vec{t}$, $\delta\vec{\Delta} = N^{-1}C^t\vec{k}_c$, cuja inversa M^{-1} existe uma vez que a respectiva característica é igual ordem s dessa matriz. O vector $\vec{\Delta}_0$ representa a solução para o vector dos parâmetros na ausência de constrangimentos, sendo o vector final dos parâmetros dado por $\vec{\Delta} = \vec{\Delta}_0 + N^{-1}C^t(CN^{-1}C^t)^{-1}(\vec{g} - C\vec{\Delta}_0) = \vec{\Delta}_0 + N^{-1}C^tM^{-1}(\vec{g} - C\vec{\Delta}_0)$. Verifica-se desta forma que o vector dos parâmetros pode ser calculado em duas partes: $\vec{\Delta}_0$ como a solução por mínimos quadrados como se não existissem constrangimentos, depois, com C e $\vec{g}$ é possível calcular $\delta\vec{\Delta}$. Quanto à incerteza das quantidades estimadas, tem-se:

- $Q_{\Delta} = N^{-1}(I - C^tM^{-1}CN^{-1})$
- $Q_v = QA^t(A^tWA)^{-1}AQ - QA^t(A^tWA)^{-1}B(N^{-1} - N^{-1}C^tM^{-1}CN^{-1})B^t(A^tWA)^{-1}AQ$
- $Q_{\hat{t}} = Q - Q_v$

Exemplo: suponha-se que o modelo matemático de um dado problema é da forma $\vec{v} + B\vec{\Delta} = \vec{f}$, com

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{\Delta} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} -1.1 \\ 1.2 \\ 1.0 \end{bmatrix}, \text{ sendo a matriz } W \text{ dos pesos das observações igual à matriz identidade. Considere-se ainda}$$

um conjunto de duas equações de constrangimento dado por $C\vec{\Delta} = \vec{g}$, com $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\vec{g} = \begin{bmatrix} -0.0208 \\ 1.0416 \end{bmatrix}$.

Utilizando o procedimento directo:

$$N = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 14 \end{bmatrix}, \quad \vec{t} = \begin{bmatrix} -3.400 \\ 6.7000 \end{bmatrix}, \quad \vec{\Delta}_0 = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.0500 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0.5000 & 1.5000 \\ 1.5000 & 4.8333 \end{bmatrix}, \quad \vec{k}_c = \begin{bmatrix} 0.0224 \\ 0.0120 \end{bmatrix}, \quad \vec{\delta\Delta} = \begin{bmatrix} 0.0624 \\ 0.0332 \end{bmatrix}, \quad \vec{\Delta} = \begin{bmatrix} 1.0624 \\ 1.0832 \end{bmatrix}$$

b) **Procedimento por eliminação de constrangimentos:** as equações de constrangimento $C_{s,u}\vec{\Delta}_{u,1} = \vec{g}_{s,1}$ podem ser utilizadas para resolver funcionalmente tantos parâmetros quanto constrangimentos existirem; estes parâmetros são então substituídos em $A_{c,n}\vec{v}_{n,1} + B_{c,u}\vec{\Delta}_{u,1} = \vec{f}_{c,1}$, reduzindo desta forma o número de parâmetros. Esta abordagem tem duas vantagens: por um lado evita a utilização directa dos constrangimentos na estimação por mínimos quadrados e, por outro lado, conduz a uma redução do número de parâmetros a serem estimados simultaneamente. No entanto, o processo de eliminação de parte dos parâmetros utilizados nos constrangimentos deve ser efectuada com cuidado pois os constrangimentos muitas vezes não incluem todos os parâmetros. Fazendo a partição do vector dos parâmetros $\vec{\Delta}$ em dois subvectores 0

$\vec{\Delta}_{1,s,1}$ e $\vec{\Delta}_{2,a,1}$, onde $a=u-s$, tem-se:

$$\begin{cases} A_{c,n}\vec{v}_{n,1} + B_{1,c,s}\vec{\Delta}_{1,s,1} + B_{2,c,a}\vec{\Delta}_{2,a,1} = \vec{f}_{c,1} \\ C_{1,s,s}\vec{\Delta}_{1,s,1} + C_{2,s,a}\vec{\Delta}_{2,a,1} = \vec{g}_{s,1} \end{cases}$$

Usando a segunda equação, obtém-se $\vec{\Delta}_1$ em função de $\vec{\Delta}_2$: $\vec{\Delta}_1 = C_{11}^{-1}(\vec{g} - C_{22}\vec{\Delta}_2)$. Assim,

$$A\vec{v} + (-B_1 C_{11}^{-1} C_{22} + B_2) \vec{\Delta}_2 = (\vec{f} - B_1 C_{11}^{-1} \vec{g})$$

que utilizando as matrizes auxiliares $\bar{B} = (-B_1 C_{11}^{-1} C_{22} + B_2)$ e $\bar{f} = (\vec{f} - B_1 C_{11}^{-1} \vec{g})$, fica

$$A\vec{v} + \bar{B} \vec{\Delta}_2 = \bar{f}$$

que representa um sistema de c equações de condição incluindo apenas $a=u-s$ parâmetros; de uma forma idêntica tem-se :

$$\vec{\Delta}_2 = \bar{N}^{-1} \bar{f},$$

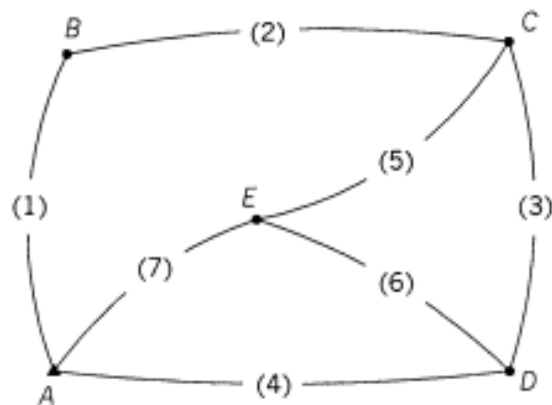
com $\bar{N}_{a,a} = \bar{B}^t (A^t W A)^{-1} \bar{B}$ e $\bar{f}_{a,1} = \bar{B}^t (A^t W A)^{-1} \bar{f}$. Calculado $\vec{\Delta}_2$, tem-se $\vec{\Delta}_1 = C_{11}^{-1}(\vec{g} - C_{22} \vec{\Delta}_2)$, obtendo-se assim a totalidade dos parâmetros.

Quanto à incerteza dos parâmetros, tem-se:

- $Q_{\Delta} = \begin{bmatrix} C1^{-1}C2 \bar{N}^{-1}C2^t(C1^{-1})^{-1} & -C1^{-1}C2 \bar{N}^{-1} \\ -\bar{N}^{-1}C2^t(C1^{-1})^{-1} & \bar{N}^{-1} \end{bmatrix}$
- $Q_v = QA^t((AQA^t)^{-1} - (AQA^t)^{-1}BQ_{\Delta}B^t(AQA^t)^{-1})AQ$

Exemplo: Considerando a rede de nivelamento da figura, na qual se conhece a altitude do ponto A=1300.62 m, pretende-se obter as altitudes ajustadas dos pontos B, C, D e E com o constrangimento de a diferença de altitude dos pontos B e E ser igual a -17.60 m, tendo sido observados os seguintes desníveis:

Linha	De	Para	Desnível (m)	Incerteza (m)
1	A	B	25.15	0.07
2	B	C	-10.57	0.05
3	C	D	-1.76	0.03
4	D	A	-12.65	0.08
5	C	E	-7.06	0.03
6	E	D	5.37	0.05
7	E	A	-7.47	0.05



Sendo $n_0=3$, $n=7$, $r=n-n_0=4$, $u'=3$, $c=r+u'=7$, $u=4$, $s=u-u'=1$, podem estabelecer-se 7 equações de condição relacionando as 7 observações e os 4 parâmetros (dependentes) e 1 equação de constrangimento relacionando dois parâmetros:

$$\begin{cases} H_A + \Delta_{AB} + v_{AB} = H_B \Rightarrow v_{AB} - H_B = -\Delta_{AB} - H_A \\ H_B + \Delta_{BC} + v_{BC} = H_C \Rightarrow v_{BC} + H_B - H_C = -\Delta_{BC} \\ H_C + \Delta_{CD} + v_{CD} = H_D \Rightarrow v_{CD} + H_C - H_D = -\Delta_{CD} \\ H_D + \Delta_{DA} + v_{DA} = H_A \Rightarrow v_{DA} + H_D = -\Delta_{DA} + H_A \\ H_C + \Delta_{CE} + v_{CE} = H_E \Rightarrow v_{CE} + H_C - H_E = -\Delta_{CE} \\ H_D + \Delta_{DE} + v_{DE} = H_E \Rightarrow v_{DE} + H_D - H_E = -\Delta_{DE} \\ H_E + \Delta_{EA} + v_{EA} = H_A \Rightarrow v_{EA} + H_C = -\Delta_{EA} + H_A \end{cases}$$

$$H_E - H_B = -17.60$$

ou, na forma matricial, $\vec{v}_7 + B_{7,4} \vec{\Delta}_4 = \vec{f}_7$ e $C_{1,4} \vec{\Delta}_4 = \vec{g}_1$, ou ainda,

$$\begin{bmatrix} v_{AB} \\ v_{BC} \\ v_{CD} \\ v_{DA} \\ v_{CE} \\ v_{DE} \\ v_{EA} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_B \\ H_C \\ H_D \\ H_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1325.77 \\ 10.57 \\ 1.76 \\ 1313.27 \\ 7.06 \\ -5.37 \\ 1308.09 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_B \\ H_C \\ H_D \\ H_E \end{bmatrix} = [-17.60] .$$

Utilizando o procedimento directo, tem-se: $N = B^t W B$, $\vec{t} = B^t W \vec{f}$, $\vec{k}_c = (CN^{-1}C^t)^{-1}(\vec{g} - CN^{-1}\vec{t})$, $\vec{\Delta} = N^{-1}(\vec{t} + C^t\vec{k}_c)$, ou seja:

Altitude do ponto B: 1325.69 m

Altitude do ponto C: 1315.14 m

Altitude do ponto D: 1313.39 m

Altitude do ponto E: 1308.09 m

de tal forma que $H_E - H_B = 1308.09 - 1325.69 = -17.60$, verificando-se o constrangimento imposto.

No caso de não ter sido estabelecido o constrangimento, o resultado seria:

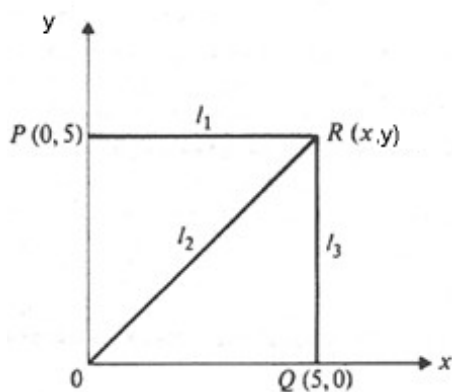
Altitude do ponto B: 1325.73 m

Altitude do ponto C: 1315.14 m

Altitude do ponto D: 1313.38 m

Altitude do ponto E: 1308.07 m

A análise da soma do quadrado dos resíduos das observações nos dois casos, 0.0266 e 0.0184, respectivamente, mostra que a introdução do constrangimento obrigou as observações a terem resíduos maiores.



Exemplo: a figura mostra uma trilateração para a determinação das coordenadas do ponto R, tendo sido medidas as 3 distâncias $\ell_1 = \overline{RP} = 5.10\text{m}$, $\ell_2 = \overline{RQ} = 7.07\text{m}$, $\ell_3 = \overline{PQ} = 4.90\text{m}$, não correlacionadas e de igual precisão, tendo-se as coordenadas em m dos pontos: $P=(0,5)$, $Q=(5,0)$. Admitindo valores aproximados para as coordenadas do ponto R dados por $x^0=5.00\text{m}$, $y^0=5.00\text{m}$ e se a coordenada y do ponto R for constrangida ao valor 5.00, calcule as coordenadas ajustadas de R.

Entrando em consideração com todos os dados disponíveis, tem-se: $n_0=1$, $n=3$, $r=2$, $u=2$, $u'=1$, $c=3$, $s=1$, $c+s=3+1=2+2=r+u$ (**caso $u < c$**).

- utilizando o **procedimento directo**, as 3 equações de condição são:

$$\begin{cases} \ell_1 + v_1 = \overline{PR} \\ \ell_2 + v_2 = \overline{OR} \\ \ell_3 + v_3 = \overline{QR} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell_1 + v_1 = \sqrt{(xR - xP)^2 + (yR - yP)^2} \\ \ell_2 + v_2 = \sqrt{(xR - xO)^2 + (yR - yO)^2} \\ \ell_3 + v_3 = \sqrt{(xR - xQ)^2 + (yR - yQ)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell_1 + v_1 = \sqrt{xR^2 + (yR - 5)^2} \\ \ell_2 + v_2 = \sqrt{xR^2 + yR^2} \\ \ell_3 + v_3 = \sqrt{(xR - 5)^2 + yR^2} \end{cases}$$

e, acrescentando a equação de constrangimento, obtém-se:

$$\begin{cases} \ell_1 + v_1 = \sqrt{xR^2 + (yR - 5)^2} \\ \ell_2 + v_2 = \sqrt{xR^2 + yR^2} \\ \ell_3 + v_3 = \sqrt{(xR - 5)^2 + yR^2} \\ yR - 5 = 0 \end{cases}$$

Como as equações de condição são não lineares, têm que ser linearizadas; por esta razão, também a equação de constrangimento $yR - 5 = 0$, embora linear, tem que ser decomposta na forma $(yR^0 + \delta yR) - 5 = 0$, onde yR^0 tem que ser igual ao valor aproximado que foi considerado nas equações de condição, isto é, $yR^0 = 5.00$ e portanto $\delta yR = 0$, que torna a equação $\vec{C}\vec{\Delta} = \vec{g}$ em:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta xR \\ \delta yR \end{bmatrix} = 0.$$

Linearizando as equações de condição, na forma matricial $\vec{v} + B\vec{\Delta} = \vec{f}$, tem-se:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{-xR^0}{[(xR^0)^2 + (yR^0 - 5)^2]^{1/2}} & \frac{-(yR^0 - 5)}{[(xR^0)^2 + (yR^0 - 5)^2]^{1/2}} \\ \frac{-xR^0}{[(xR^0)^2 + (yR^0)^2]^{1/2}} & \frac{-yR^0}{[(xR^0)^2 + (yR^0)^2]^{1/2}} \\ \frac{-(xR^0 - 5)}{[(xR^0 - 5)^2 + (yR^0)^2]^{1/2}} & \frac{-yR^0}{[(xR^0 - 5)^2 + (yR^0)^2]^{1/2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} [(xR^0)^2 + (yR^0 - 5)^2]^{1/2} - \ell_1 \\ [(xR^0)^2 + (yR^0)^2]^{1/2} - \ell_2 \\ [(xR^0 - 5)^2 + (yR^0)^2]^{1/2} - \ell_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad W = I.$$

Tem-se então, utilizando a matriz C e a matriz N^{-1} , tem-se $M = \frac{3}{4}$ e $\delta\vec{\Delta} = \begin{bmatrix} -0.033 \\ 0.1 \end{bmatrix}$. Finalmente

$$\vec{\Delta} = \vec{\Delta}^0 + \delta\vec{\Delta} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.033 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.067 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o que significa que não há correcção para $yR^0 = 5.00m$, sendo desta forma satisfeita a equação de constrangimento que fixava o valor de x_2 , tendo-se assim $R(5.067, 5.000)$.

- utilizando o **procedimento da eliminação de constrangimentos**, tem-se, de $C = [0,1]$, $C1 = [0]$, $C2 = [1]$,

$$B_1 = \begin{bmatrix} -1.0000 \\ -0.7071 \\ 0.0000 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -0.7071 \\ -1.0000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{\Delta 1} &= [(-B1 \ C2^{-1} \ C1 + B1)^t (-B1 \ C2^{-1} \ C1 + B1)]^{-1} (-B1 \ C2^{-1} \ C1 + B1)^t (\vec{f} - B2 \ C2^{-1} \vec{g}) = \\ &= \left(\begin{bmatrix} -1 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -1 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.0 \\ 0.1 \end{bmatrix} = 0.0667 \end{aligned}$$

valores que vão actualizar a aproximação inicial, até se obter R(5.067,5.000).

Tem-se ainda:

$$\vec{v} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.0349 \\ -0.0472 \\ 0.1004 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{\ell}_{ajust} = \begin{bmatrix} 5.0651 \\ 7.1172 \\ 5.0004 \end{bmatrix}.$$

o que mostra que o constrangimento adoptado deu origem a resíduos das observações maiores do que no caso em que não existiam constrangimentos, isto é, as observações ajustadas tiveram que sofrer correcções maiores para se adaptarem ao(s) constrangimento(s). Por esta razão, quando num problema existirem constrangimentos, deve-se iniciar o ajustamento tratando o problema não constrangido para se perceber se há observações com alguma espécie de erros (que conduzam a resíduos grandes) e só então incluir os constrangimentos.

No caso em que o número de parâmetros excede o número de equações de condição, isto é, $u > c$, embora não exista limite superior para o número u de parâmetros, o número de equações de condição não pode exceder o número de observações, tendo-se característica(A)= c , característica(B)= c , característica(C)= s , o que obriga a efectuar modificações nos procedimentos que foram definidos atrás.

a) Procedimento directo: seguindo o desenvolvimento efectuado atrás, em que N tem ordem igual a u mas característica $c < u$, combinando $-N\vec{\Delta} + C^t \vec{k}_c = -\vec{t}$ e $C\vec{\Delta} = \vec{g}$, tem-se

$$\begin{bmatrix} -N & C^t \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\Delta} \\ \vec{k}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{t} \\ \vec{g} \end{bmatrix}, \text{ cuja solução é } \begin{bmatrix} \vec{\Delta} \\ \vec{k}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -N_{u,u} & C_{u,s}^t \\ C_{u,s} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\vec{t} \\ \vec{g} \end{bmatrix}. \text{ Note-se que embora } N \text{ seja singular, a matriz } \begin{bmatrix} -N & C^t \\ C & 0 \end{bmatrix} \text{ não é}$$

singular. Quanto à precisão, tem-se $\begin{bmatrix} Q_{\Delta\Delta} & Q_{\Delta k_c} \\ Q_{k_c \Delta} & Q_{k_c k_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$, sendo $\begin{bmatrix} -N & C^t \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta^t \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}$.

- b) Procedimento por eliminação de constrangimentos:** da relação $c+s=r+u$, o número de elementos no vector $\overline{\Delta 2}_{a,1}$ que sobra após eliminar $\overline{\Delta 1}_{s,1}$ de $\overline{\Delta}_{u,1}$ é dado por $a=u-s-c-r$, que indica que o número a de parâmetros que resta após a eliminação de constrangimentos é inferior ao número c de equações de condição. Desta forma a matriz $\overline{B} = (-B1 C1^{-1}C2 + B2)$ tem característica igual a a, dando origem a uma matriz $\overline{N}_{a,a} = \overline{B}^t(A^tWA)^{-1}\overline{B}$ não singular. Consequentemente as soluções para $\overline{\Delta 2}$ e $\overline{\Delta 1}$ são ambas possíveis.

Exemplo: supondo $n=2$ observações, $c=2$ equações de condição ($A=I$ para simplificar), $u=3$ parâmetros, $s=2$ equações de constrangimento com

$$\vec{v}_{2,1} + B_{2,3}\vec{\Delta}_{3,1} = \vec{f}_{2,1} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$C_{2,3}\vec{\Delta}_{3,1} = \vec{g}_{2,1} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 26 \end{bmatrix}$$

estime o vector $\vec{\Delta}$ admitindo $W = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$.

Método directo; $c + s = 2 + 2 = 4 = u + r = 3 + r \Rightarrow r = 1$; $N = \begin{bmatrix} 18.5 & -8 & 5 \\ -8 & 10 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$; $\vec{t} = \begin{bmatrix} -3 \\ -32 \\ -22 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \vec{\Delta}_{3,1} \\ \vec{k}_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -N & C^t \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\vec{t} \\ \vec{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18.5 & 8 & -5 & | & -1 & 1 \\ 8 & -10 & -2 & | & 1 & -3 \\ -5 & -2 & -4 & | & 1 & 1 \\ - & - & - & | & - & - \\ -1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & | & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 32 \\ 22 \\ - \\ 2 \\ 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0500 & -0.0250 & -0.0250 & | & -0.2750 & -0.1250 \\ -0.0250 & -0.0125 & -0.0125 & | & 0.1125 & -0.3125 \\ -0.0250 & -0.0125 & -0.0125 & | & 0.6125 & 0.1875 \\ - & - & - & | & - & - \\ -0.2750 & 0.1125 & 0.6125 & | & 2.1125 & -0.8125 \\ -0.1250 & -0.3125 & 0.1875 & | & -0.8125 & 0.3125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 32 \\ 22 \\ - \\ 2 \\ 26 \end{bmatrix}$$

donde

$$\vec{\Delta} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.30 \\ -8.65 \\ 5.35 \end{bmatrix}$$

Método da eliminação de constrangimentos: pondo $\vec{\Delta} = \begin{bmatrix} \overline{\Delta 1} \\ \overline{\Delta 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ - \end{bmatrix}$ na equação $\vec{v} + B1\overline{\Delta 1} + B2\overline{\Delta 2} = \vec{f}$ e $C1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$,

$C2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B1 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$, $B2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, na equação $C1\overline{\Delta 1} + C2\overline{\Delta 2} = \vec{g}$, tem-se $\overline{N} = 80$, $\vec{t} = 428$, $\overline{\Delta 2} = [x_3] = 5.35$, $\overline{\Delta 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.30 \\ -8.65 \end{bmatrix}$.

Num procedimento mais geral no ajustamento por mínimos quadrados, todos os elementos do modelo matemático podem ser considerados como observações, ficando a responsabilidade da respectiva classificação na matriz dos pesos. Este conceito pode ser aplicado neste contexto, associando às equações de constrangimento um vector resíduo e uma matriz de pesos, na forma $\vec{v}_c + C \vec{\Delta} = \vec{g}$. Esta equação pode ser combinada com a equação $A \vec{v} + B \vec{\Delta} = \vec{f}$, obtendo-se $\tilde{A} \tilde{v} + \tilde{B} \vec{\Delta} = \tilde{f}$, onde

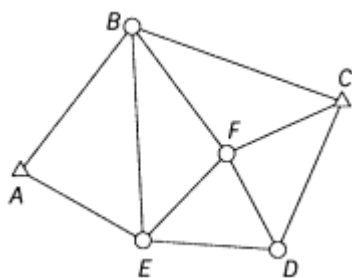
$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \tilde{v} = \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{v}_c \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix}, \quad \tilde{f} = \begin{bmatrix} \vec{f} \\ \vec{g} \end{bmatrix}$$

cujas solução é dada por $\vec{\Delta} = [\tilde{B}^t (\tilde{A} \tilde{W}^{-1} \tilde{A}^t)^{-1} \tilde{B}]^{-1} [\tilde{B}^t (\tilde{A} \tilde{W}^{-1} \tilde{A}^t)^{-1} \tilde{f}]$, onde

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & W_c \end{bmatrix},$$

não se assumindo qualquer correlação entre os dois sistemas de equações e em que as magnitudes dos elementos da matriz W_c são consideravelmente maiores do que as dos elementos da matriz W , o que leva a valores muito pequenos do vector $\vec{v}_c$ e tornando a equação $\vec{v}_c + C \vec{\Delta} = \vec{g}$ muito semelhante à equação original.

Exemplo: foi observada a rede de trileração indicada na figura com precisão (das observações de distância) 1:50000, baseada nos dois pontos de controlo A e C cujas coordenadas, obtidas num levantamento pré-existente, têm precisão 1:10000. Mantendo fixas as coordenadas (X_A, Y_A) e (X_C, Y_C) , as observações vão ter que se ajustar às estações de controlo, afectadas por erros de magnitude superior aos erros dessas observações, sendo provável que os respectivos resíduos sejam altos, tendo-se B como sendo uma matriz (10,8) correspondente às 10 distâncias observadas e aos 8 parâmetros (coordenadas (X, Y) dos pontos B, D, E e F).



	X	Y
A	10000.10	10000.10
C	12487.08	10528.65

de	A	A	B	C	C	B	B	D	D	E
para	B	E	C	F	D	E	F	F	E	F
dist.	1400.91	1090.55	1723.45	976.26	1244.40	1644.29	1217.54	842.75	1044.99	930.93
σ	0.023	0.022	0.023	0.022	0.023	0.023	0.022	0.022	0.022	0.022

Se os dois pontos de controlo A e C forem consideradas fixos mas a posição verdadeira destes pontos não estiver de acordo com as coordenadas utilizadas, as observações vão ajustar-se a pontos de controlo com coordenadas que não são exactas, de tal forma que os resíduos das observações são grandes, evidenciando esta dificuldade no ajustamento, obtendo-se os seguintes resultados:

$n_0=8$, $n=10$, $r=n-n_0=2$, $u=8$, $c=r+u=10$, com $\vec{v}_{10,1} + B_{10,8}\vec{\Delta}_{8,1} = \vec{f}_{10,1}$

	X	Y
B	10862.546	11104.013
D	11990.893	9387.473
E	10948.576	9461.941
F	11595.231	10131.591

$$\vec{v} = (-0.040, -0.036, -0.036, -0.017, -0.018, 0.034, 0.012, 0.019, -0.016, -0.020)$$

$$\sum_{i=1}^{10} v_i^2 = 0.0844$$

Nesta situação, é mais indicado permitir que as coordenadas dos pontos de controlo também sofram um ajustamento de acordo com a qualidade atribuída, da forma $X'_A = X_A + v_{XA}$, $Y'_A = Y_A + v_{YA}$, $X'_C = X_C + v_{XC}$, $Y'_C = Y_C + v_{YC}$, onde X', Y' são as coordenadas ajustadas dos pontos de controlo, X, Y são as respectivas coordenadas previamente conhecidas e v_X, v_Y são as correções a essas coordenadas. Estas 4 equações devem ser processadas conjuntamente com as 10 equações de condição, considerando-se assim 12 parâmetros relativos aos 6 pontos:

$n_0=8$, $n=14$, $r=n-n_0=6$, $u'=8$, $c=r+u'=14 \leq 14$, $u=12$, $s=u-u'=4$, $c+s=10+4=14=2+12=r+u$, com $\vec{v}_{14,1} + B_{14,12}\vec{\Delta}_{12,1} = \vec{f}_{14,1}$. Para tornar os pontos A e C fixos atribuem-se pesos elevados às respectivas coordenadas, enquanto que atribuindo pesos baixos a essas coordenadas permite-se que a respectiva posição possa variar.

Colocando os pontos segundo a ordem A, C, B, D, E, F, tem-se:

$$\vec{v} + \begin{bmatrix} \frac{\partial D_{AB}}{\partial X_A} & \frac{\partial D_{AB}}{\partial Y_A} & 0 & 0 & \frac{\partial D_{AB}}{\partial X_B} & \frac{\partial D_{AB}}{\partial Y_B} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial D_{AE}}{\partial X_A} & \frac{\partial D_{AE}}{\partial Y_A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial D_{AE}}{\partial X_E} & \frac{\partial D_{AE}}{\partial Y_E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial D_{BC}}{\partial X_C} & \frac{\partial D_{BC}}{\partial Y_C} & \frac{\partial D_{BC}}{\partial X_B} & \frac{\partial D_{BC}}{\partial Y_B} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial D_{CF}}{\partial X_C} & \frac{\partial D_{CF}}{\partial Y_C} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial D_{CF}}{\partial X_F} & \frac{\partial D_{CF}}{\partial Y_F} \\ 0 & 0 & \frac{\partial D_{CD}}{\partial X_C} & \frac{\partial D_{CD}}{\partial Y_C} & 0 & 0 & \frac{\partial D_{CD}}{\partial X_D} & \frac{\partial D_{CD}}{\partial Y_D} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial D_{BE}}{\partial X_B} & \frac{\partial D_{BE}}{\partial Y_B} & 0 & 0 & \frac{\partial D_{BE}}{\partial X_E} & \frac{\partial D_{BE}}{\partial Y_E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial D_{BF}}{\partial X_B} & \frac{\partial D_{BF}}{\partial Y_B} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial D_{BF}}{\partial X_F} & \frac{\partial D_{BF}}{\partial Y_F} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial D_{DF}}{\partial X_D} & \frac{\partial D_{DF}}{\partial Y_D} & 0 & 0 & \frac{\partial D_{DF}}{\partial X_F} & \frac{\partial D_{DF}}{\partial Y_F} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial D_{DE}}{\partial X_D} & \frac{\partial D_{DE}}{\partial Y_D} & \frac{\partial D_{DE}}{\partial X_E} & \frac{\partial D_{DE}}{\partial Y_E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial D_{EF}}{\partial X_E} & \frac{\partial D_{EF}}{\partial Y_E} & \frac{\partial D_{EF}}{\partial X_F} & \frac{\partial D_{EF}}{\partial Y_F} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dXA \\ dYA \\ dXC \\ dYC \\ dXB \\ dYB \\ dXD \\ dYD \\ dXE \\ dYE \\ dXF \\ dYF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{AB} - \overline{AB}_0 \\ \overline{AE} - \overline{AE}_0 \\ \overline{BC} - \overline{BC}_0 \\ \overline{CF} - \overline{CF}_0 \\ \overline{CD} - \overline{CD}_0 \\ \overline{BE} - \overline{BE}_0 \\ \overline{BF} - \overline{BF}_0 \\ \overline{DF} - \overline{DF}_0 \\ \overline{DE} - \overline{DE}_0 \\ \overline{EF} - \overline{EF}_0 \\ \overline{XA} - \overline{XA}_0 \\ \overline{YA} - \overline{YA}_0 \\ \overline{XC} - \overline{XC}_0 \\ \overline{YC} - \overline{YC}_0 \end{bmatrix}$$

As últimas 4 linhas da matriz B correspondem às equações impostas às coordenadas dos pontos A e C. Incluindo no ajustamento as coordenadas dos pontos de controlo, aparecem 4 novos parâmetros (os acréscimos relativamente às suas coordenadas iniciais) mas ao serem incluídas 4 novas equações, a redundância não é alterada.

Neste exemplo a precisão das coordenadas dos pontos A e C não é dada directamente mas sim em função de uma distância, mais exactamente, se a precisão da distância entre os pontos A e C é 1/10000, as respectivas coordenadas devem conter erros estimados de tal forma que essa distância tenha precisão melhor ou igual a 1/10000. A partir da expressão de propagação de variâncias-covariâncias para a distância D_{ij} entre dois pontos quaisquer i e j, $\sigma_{D_{ij}}^2 = \left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial x_i}\right)^2 S_{x_i}^2 + \left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial y_i}\right)^2 S_{y_i}^2 + \left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j}\right)^2 S_{x_j}^2 + \left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial y_j}\right)^2 S_{y_j}^2$, que indica a variância da distância em função da variância das coordenadas dos extremos da linha, supondo que os erros nas coordenadas são iguais nos 2 eixos, tem-se: $\sigma_{D_{ij}}^2 = 2 \left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial x_i}\right)^2 S_{x_i}^2 + 2 \left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial y_i}\right)^2 S_{y_i}^2 = 2 \left(\frac{\Delta x}{l_j} S_c\right)^2 + 2 \left(\frac{\Delta y}{l_j} S_c\right)^2$, onde S_c representa o desvio padrão em x e y das coordenadas, ou seja, $\sigma_{D_{ij}}^2 = 2 S_c^2 \frac{x^2 + y^2}{l_j^2} = 2 S_c^2$. A partir das coordenadas conhecidas de A e C obtém-se a distância 2542.65 entre eles; sendo o erro absoluto de uma distância 1/10000, o erro relativo nessa distância é $\sigma_D = \pm 2542.65/10000 = \pm 0.25$, donde $S_c = \pm 0.25/\sqrt{2} = 0.18$ (compare-se este valor da precisão estimada para a distância AC obtida no primeiro levantamento com a precisão das distâncias medidas no segundo levantamento). Pode então construir-se a matriz dos pesos das observações (distâncias e coordenadas de A e C):

$$W = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.023^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{0.022^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{0.023^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0.022^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0.023^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0.023^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0.022^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0.022^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0.022^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0.022^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0.18^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0.18^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0.18^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0.18^2} \end{bmatrix}$$

	X	Y
A	10000.041	10000.088
C	12487.139	10528.662
B	10862.558	11103.995
D	11990.905	9387.489
E	10948.574	9461.958
F	11595.268	10131.602

$$\vec{v} = (-0.0007, -0.0006, -0.0030, 0.0030, -0.0028, -0.0019, 0.0039, 0.0029, -0.0023, 0.0025)$$

$$\sum_{i=1}^{10} v_i^2 = 0.0081$$

Relativamente à situação em que os pontos A e C foram considerados fixos, foram agora acrescentados 4 parâmetros adicionais (as coordenadas destes dois pontos) mas como se adicionaram 4 novas equações, a redundância manteve-se.

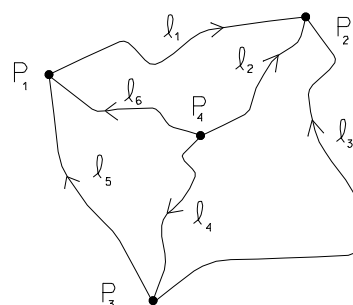
9. Problema do datum

A posição não é uma grandeza absoluta, isto é, a posição de um ponto no espaço requer não só a especificação de 3 parâmetros independentes (coordenadas) mas também dos elementos do *datum* (referencial), devendo este último ser sempre considerado na discussão da precisão e da exactidão das coordenadas. No caso das redes topográficas, embora a posição relativa dos pontos seja de grande importância prática, as respectivas coordenadas só podem ser obtidas num *datum* (local, regional ou global) adequadamente definido, que permita o cálculo das posições em função das observações realizadas. Fisicamente, numa rede 1D de nivelamento (de gravimetria) isto quer dizer que enquanto não for fixada uma altitude (um valor da gravidade) qualquer translação em z mantém os desníveis mas não permite a atribuição de altitudes aos pontos da rede; numa rede 2D, qualquer conjunto de uma translação no plano, uma rotação em z e um escalamento mantém a posição relativa dos pontos da rede, não permitindo a determinação das coordenadas dos pontos da rede. Frequentemente é difícil decidir se os deslocamentos detectados numa rede são o resultado de movimentos reais, podendo dever-se a erros nas observações ou a alterações no *datum* adoptado em diferentes épocas. Um *datum* usual no posicionamento espacial é constituído por um sistema de eixos ortogonais e directos (X,Y,Z), que tem que ser localizado no espaço. Associado à definição do *datum* está a unidade de comprimento utilizada no cálculo dos parâmetros (coordenadas). Uma forma de o realizar é seleccionar ou materializar uma origem na proximidade da zona de interesse; a orientação dos eixos pode fixar-se alinhando um deles (convencionalmente o eixo Z) segundo a direcção da força da gravidade na origem (utilizando nivelas) e alinhando outro eixo na direcção de um outro ponto. Esta definição é explícita na medida em que se baseia em pontos que têm existência física. A definição do *datum* pode ser implícita, isto é, não pode ser fisicamente realizado: é o caso de um *datum* espacial global com origem no centro de massa da Terra, o eixo Z alinhado segundo o eixo médio de rotação da Terra e o eixo X definido de tal forma que o plano XZ contenha o meridiano médio de Greenwich. Outro exemplo é a superfície de um elipsóide, a partir da qual se definem 3 parâmetros independentes necessários para definir a posição de um ponto: latitude, longitude e altitude elipsoidais. Um referencial espacial

tridimensional requer a definição de sete elementos do *datum*: um elemento de escala, três elementos de localização da origem do referencial e três elementos de rotação dos três eixos; para o posicionamento num plano devem ser definidos quatro elementos: um elemento de escala, dois elementos de localização da origem do referencial e um elemento de rotação dos dois eixos. O número necessário e suficiente e o tipo de elementos do *datum* pode ser obtido através de uma combinação apropriada de observações: por exemplo, em duas dimensões, define-se um *datum* fixando as coordenadas de dois pontos da rede, assim como também se define um *datum* fixando as coordenadas de um ponto de rede, uma distância entre dois pontos da rede e o azimute (rumo) entre dois pontos da rede.

Exemplo: foram observados os 6 desníveis $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6$ com $P_{6,6} = I_{6,6}$ indicados na figura, sendo os parâmetros as altitudes C_1, C_2, C_3 e C_4 dos 4 pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 . Podem estabelecer-se as seguintes 6 equações entre as 6 observações e os 4 parâmetros ($n_0=4, n=6, r=n-n_0=2, u=4, c=r+u=6$):

$$\begin{cases} \ell_1 + v_1 = -C_1 + C_2 \\ \ell_2 + v_2 = C_2 - C_4 \\ \ell_3 + v_3 = C_2 - C_3 \\ \ell_4 + v_4 = C_3 - C_4 \\ \ell_5 + v_5 = C_1 - C_3 \\ \ell_6 + v_6 = C_1 - C_4 \end{cases}$$



Problema do *datum* geodésico a 1-d

ou, na forma matricial, $\vec{\ell}_{6,1} + \vec{v}_{6,1} = B_{6,4} \vec{\Delta}_{4,1}$, com

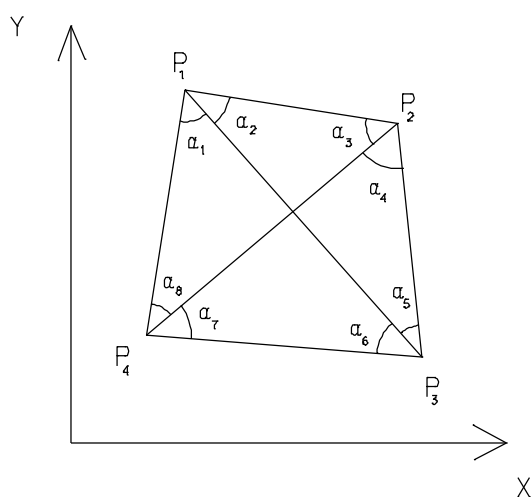
$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \text{matriz dos coeficientes dos parâmetros}, \quad \vec{\Delta} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \text{vector dos parâmetros}.$$

A característica $C(B)$ da matriz B é igual ao número máximo de linhas ou colunas linearmente independentes, sendo igual a 3 (por exemplo, a 1ª coluna é igual à soma dos simétricos das 3 restantes colunas), isto é, existe um vector $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)^T$ em que pelo menos um dos $\lambda_i \neq 0$ e tal que $B\vec{\lambda} = 0$. Designa-se por **núcleo** da aplicação $f: R^6 \rightarrow R^4$ definida pela matriz B ao subespaço $N(B) = \{ \vec{x} \in R^4: B\vec{\Delta} = \vec{0} \}$, cuja dimensão d tem o nome de **nulidade ou deficit de característica** de B , de tal forma que $d = \dim(B) - C(B) = 4 - 3 = 1$. A matriz 4×4 das equações normais $N = (B^t W B)$, dada por

$$N = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

tem característica igual a 3 e portanto é singular, não tendo inversa, pelo que é impossível estimar as altitudes a partir da equação $\vec{\Delta} = (B^t W B)^{-1} B^t W \vec{\ell}$, o que traduz o facto de qualquer translação em altitude dos 4 pontos manter os desníveis observados, não sendo no entanto possível calcular as altitudes dos pontos de forma unívoca. O deficit de característica é eliminado definindo um datum, isto é, introduzindo uma quantidade independente fixando a altitude de (qualquer) um dos pontos, o que permite a inversão da matriz normal e portanto a realização do transporte das altitudes a partir do *datum*. Um *datum* com significado físico é um elemento fundamental no processo de determinação dos vectores posição ou vectores deslocamentos: para além de eliminar o *deficit* de característica da rede de monitorização, um *datum* deve fornecer uma estimativa razoável para o vector dos parâmetros e para a respectiva matriz cofactor.

Exemplo: considerando o quadrilátero da figura seguinte, se forem observados os **8 ângulos** α_i ($i=1,\dots,8$) indicados, sendo pretendidas as coordenadas planimétricas dos **4 pontos** os parâmetros ($u=8$), a **matriz B** dos coeficientes das equações de observação, do tipo $v_k - R_{i,j} + R_{\ell,j} = -\alpha_k$, $k=1,\dots,8$, $i, j, \ell=1,\dots,4$, $i \neq j \neq \ell$, que relacionam os 8 ângulos observados com as 8 coordenadas (x_i, y_i) , $i=1,\dots,4$ é 8×8 , tendo-se $C(A)=4$, pelo que $d = 8 - 4 = 4$ (deficit de característica de A), correspondendo à possibilidade de qualquer conjugação de duas translações (em X e em Y), uma rotação em torno de Z e a aplicação de um factor de escala manter os ângulos observados. O *deficit* de característica é eliminado definindo um *datum*, isto é introduzindo 4 quantidades independente, por exemplo fixando as coordenadas de dois dos pontos ou fixando as coordenadas de um dos pontos e definindo um rumo e uma distância para outro ponto, o que permite a inversão da matriz normal. Caso sejam medidas as 6 distâncias d_{ij} ($i=1,\dots,4$, $j=1,\dots,4$, $i \neq j$) entre os pontos da rede, a matriz A dos coeficientes das equações de observação do tipo $v_{i,j} + (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 = d_{i,j}^2$, $i, j=1,\dots,4$, $i \neq j$, que relacionam as 6 distâncias observadas com as 8 coordenadas (x_i, y_i) , $i=1,\dots,4$ é 6×8 , tendo-se $C(A)=5$, pelo que $d=8-5=3$, correspondendo à possibilidade de qualquer conjugação de duas translações em X e em Y e uma rotação em torno de Z manter a configuração da rede, definindo as distâncias medidas a escala (isto é, neste caso, as próprias observações definiram o factor de escala).



Problema do *datum* geodésico a 2-d

$$n_0 = 8$$

$$n = 8$$

$$r = n - n_0 = 0$$

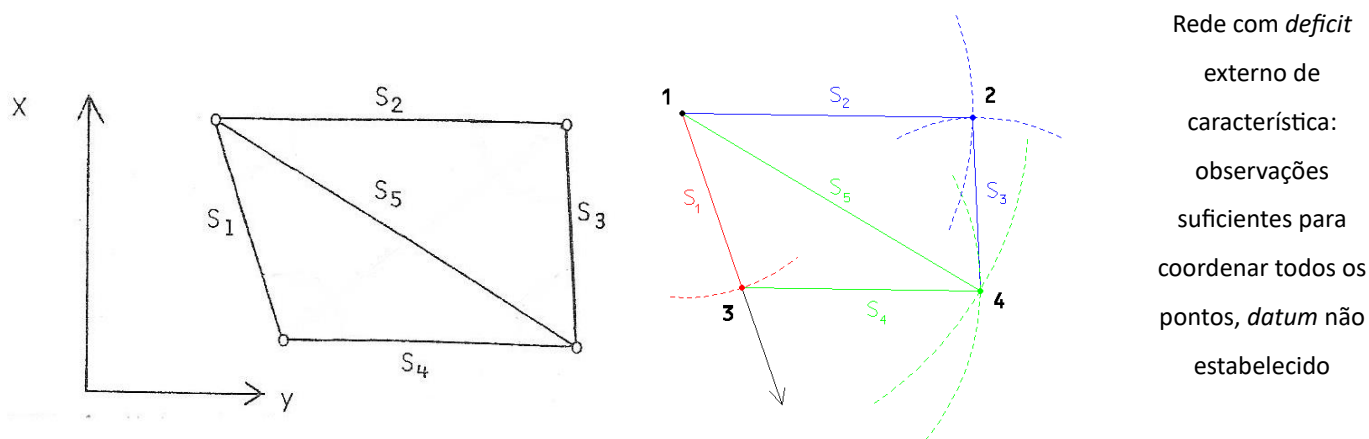
$$u = 8$$

$$c = r + u = 8$$

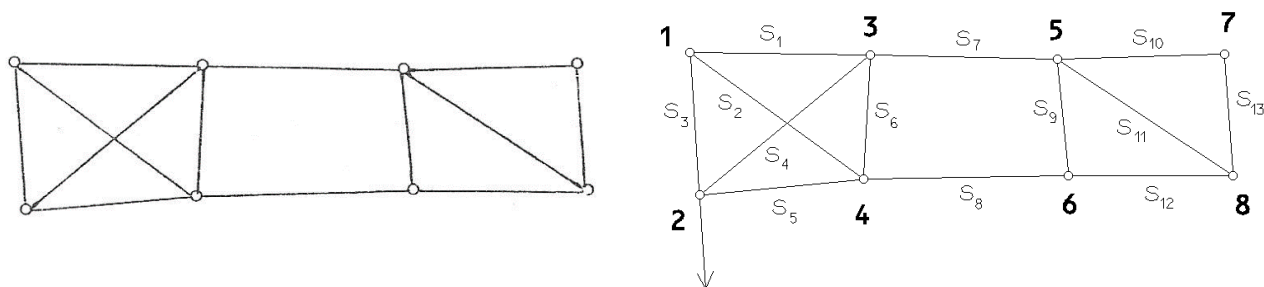
Analizando o eventual *deficit* d de característica da matriz $B_{n,n}$, podem ser distinguidas causas **externas**, relacionadas com o estabelecimento do *datum* e **internas**, relacionadas com deficiências de configuração da rede. O *deficit* de característica relacionado com o *datum* é identificado através do *deficit* de característica C_{datum} da matriz $B_{n,n}$, isto é, da diferença entre o número de parâmetros e o número de colunas linearmente independentes de $B_{n,n}$: $d_{\text{datum}} = u - C_{\text{datum}}$. O *deficit* de característica relacionado com a *configuração* tem como consequência que nem todos os pontos da rede podem ser determinados: designando por $C_{\text{configuração}}$ a característica de configuração, definida como o número n^l de linhas linearmente independentes da matriz $A_{n \times u}$, tem-se $n^l = u - d_{\text{datum}}$, o que significa que são necessárias e suficientes n^l observações independentes entre si para determinar a rede. Se existirem n observações independentes com $n \leq n^l$, há um *deficit* de característica $d_{\text{configuração}} = n^l - n$, com $C_{\text{configuração}} = n^l - d_{\text{configuração}}$.

Os exemplos seguintes ilustram os dois tipos de *deficit* de característica:

- 1) Rede com **deficit externo** de característica relacionado com a definição do *datum*:



Tendo sido efectuadas as 5 observações de distância indicadas na figura anterior, para obter as coordenadas dos 4 pontos da rede é necessário definir um *datum*; supondo que se fixam arbitrariamente as coordenadas do ponto 1 e que se fixa a direcção do ponto 1 para o ponto 3 (3 parâmetros no total), obtêm-se as coordenadas do ponto 3 a partir da distância S_1 como intersecção da direcção fixada com uma circunferência de centro no ponto 1 e raio S_1 ; conhecidas as coordenadas dos pontos 1 e 3, obtêm-se as coordenadas do ponto 4 como sendo a intersecção da circunferência com centro no ponto 1 e raio S_5 com a circunferência com centro no ponto 3 e raio S_4 ; as coordenadas do ponto 2 são obtidas como sendo a intersecção da circunferência com centro no ponto 1 e raio S_2 com a circunferência com centro no ponto 4 e raio S_3 . Resumindo, $n=5$, $n_0=5$, $r=n-n_0=0$, $u=5$, $c=r+u=5$. Posto o problema de outra forma, pretende-se obter as coordenadas planas dos quatro pontos que constituem a rede, pelo que $u=8$; tendo sido efectuadas 5 observações de distância S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 , ou seja, $n=5$, tem-se $d_{\text{datum}}=8-5=3$, pelo que a rede é livre, sendo necessário fixar as coordenadas de um ponto (2 parâmetros correspondentes a uma translação no plano) e uma direcção (1 parâmetro correspondente a uma rotação no plano), o suficiente para que $d=0$, pois a escala da rede é fixada pelas próprias observações de distância.

2) Rede com **deficit interno** de característica relacionado com a configuração da rede:

Rede com *deficit* interno de característica: *datum* (eventualmente) estabelecido, observações insuficientes para coordenar todos os pontos da rede

Tendo sido efectuadas as 13 observações de distância indicadas na figura anterior, para se obter as coordenadas dos 8 pontos da rede é necessário definir um *datum*; supondo que se fixam arbitrariamente as coordenadas do ponto 1 e que se fixa a direcção do ponto 1 para o ponto 2 (3 parâmetros no total), obtêm-se em primeiro lugar as coordenadas do ponto 2 (com S_3) e em seguida as coordenadas dos pontos 3 e 4, podendo ser utilizadas diversas combinações de S_1 , S_2 , S_4 , S_5 e S_5 (com redundância, portanto). Para passar das coordenadas dos pontos 3 e 4 para os pontos 5 e 6 verifica-se que falta uma observação (de 3 para 6 ou de 4 para 5), pelo que a figura não pode ser completamente calculada. Resumindo, $n=13$, $n_0=13$, $r=n-n_0=0$, $u=13$, $c=r+u=13$. Posto o problema de outra forma, pretende-se obter as coordenadas planas dos oito pontos que constituem a rede, pelo que $u=16$; tendo sido efectuadas 13 observações de distância ou seja, $n=13$, tem-se $d=16-13=3$, pelo que a rede é livre, sendo necessário fixar as coordenadas de um ponto (2 parâmetros correspondentes a uma translação no plano) e uma direcção (1 parâmetro correspondente a uma rotação no plano), o suficiente para que $d=0$, pois a escala da rede é fixada pelas próprias observações de distância. Tem-se, no entanto, que nem todas as 13 observações são independentes, pelo que, mesmo fixando o *datum*, o *deficit* de característica é igual a 1.

A fixação de um *datum* numa rede é uma imposição externa da posição, da orientação e da escala da rede. As quantidades não enviesadas que podem ser estimadas no processo de ajustamento da rede têm que ser independentes de uma (eventual) mudança de *datum* (como é o caso do vector dos resíduos).

Observáveis	t_x	t_y	r_z	s
Distâncias	---	---	---	x
Ângulos azimutais	---	---	---	---
Azimutes	---	---	x	---
Posições	x	x	x	x
Diferenças de posições	---	---	x	x

Informação contida nas observações geodésicas úteis para a definição dos parâmetros do *datum* 2D: t_x e t_y definem a translação em relação ao referencial (x,y) adoptado, r_z define a rotação em relação ao eixo z e s define a escala

Na generalização para uma rede a 3 dimensões, o *deficit* de característica máximo da matriz B é igual a 7, sendo neste caso necessárias 7 quantidades de forma a definir o *datum* (este número é reduzido para 6 se a escala for obtida a partir de medições de distância e para 5 se a orientação do eixo z for obtida a partir de observações da distância zenital).

Nas redes geodésicas de 1ª ordem a nível europeu seguiu-se este procedimento quando estas foram observadas e processadas há mais de um século, definindo-se um ponto origem da rede – *datum* geodésico, no qual foram arbitradas coordenadas geodésicas (em geral iguais às coordenadas astronómicas), ondulação do geóide nula (altitude elipsoidal igual à altitude ortométrica), desvios da vertical nulos (normal ao elipsóide coincidente com a vertical do lugar) e rumo (azimute geodésico) para outro ponto da rede coincidente com o azimute astronómico, convenientemente reduzido.

Como exemplo, cite-se o caso do *datum* Lisboa, tendo sido adoptado o elipsóide de Hayford, o primitivo vértice Castelo de S. Jorge como ponto origem das coordenadas geodésicas, tendo as observações astronómicas sido aí efectuadas cerca de 1890; a orientação da rede era dada pelo azimute Lisboa-Serves e a escala da rede era dada pela base da Chamusca (decâmetro de Repsold); as observações angulares foram efectuadas entre 1863 e 1888 utilizando teodolitos Troughton e Repsold, utilizando-se para efeitos de cálculo o método das equações de condição, no caso da triangulação fundamental com um único bloco e no caso da restante 1ª ordem com vários blocos. Como outro exemplo, cite-se o caso do *datum* 73, tendo sido adoptado o elipsóide de Hayford, o vértice Melriça T.F. nº 4 como ponto origem das coordenadas geodésicas, tendo as observações astronómicas sido aí efectuadas em 1964; a orientação da rede foi obtida através de várias estações de Laplace; a escala da rede era dada através da base de ínvar de Vilar Formoso juntamente com a medição de vários lados utilizando geodímetros AGA e Electrotape e telurómetros; as observações angulares foram efectuadas nos anos 60 com teodolitos T3 e T4; foi utilizado o método da variação de coordenadas no cálculo da triangulação fundamental em bloco. A alteração do *datum* Lisboa para *datum* 73 deveu-se ao facto de o ponto origem no primeiro caso ser muito excêntrico relativamente à configuração do país, o que se traduzia numa acumulação de erros provocando distorções nas regiões mais afastadas da origem; assim, a adopção de uma origem na zona central de Portugal permitiu uma distribuição mais equilibrada das distorções (note-se que as coordenadas dos vértices comuns aos dois *data* seriam diferentes devido à alteração da origem, mesmo se tivessem sido utilizadas as mesmas observações para recalcular o transporte de coordenadas geodésicas, o que significa que a selecção do *datum* não é irrelevante no resultado final do ajustamento, isto é, uma mudança de *datum* traduz-se numa alteração das coordenadas dos pontos da rede). Todas as observações subsequentes tendo em vista a densificação da rede estão relacionadas com a rede de 1ª ordem através de observações ligando pontos novos aos já existentes. Uma vez que as coordenadas dos pontos da rede de 1ª ordem não entram no cálculo das redes seguintes (são consideradas fixas), o modelo não sofre do problema do *datum*. O ETRS89 é um sistema global de referência recomendado pela EUREF (European Reference Frame, subcomissão da IAG - Associação Internacional de Geodesia) estabelecido através de técnicas espaciais de observação. No simpósio da EUREF realizado em Itália em 1990 foi adoptada a seguinte resolução: "A Sub-comissão da IAG para o Referencial Geodésico Europeu (EUREF) recomenda que o sistema a ser adoptado pela EUREF seja coincidente com o ITRS na época de 1989.0 e fixado à parte estável da Placa Euro-Asiática, sendo designado por Sistema de Referência Terrestre Europeu 1989 (European Terrestrial Reference System – ETRS89)".

O estabelecimento do ETRS89 em Portugal Continental foi efectuado com base em campanhas internacionais (realizadas em 1989, 1995 e 1997), que tiveram como objectivo ligar convenientemente a rede portuguesa à rede europeia. Nos anos subsequentes, toda a Rede Geodésica de 1ª e 2ª ordens do Continente foi observada com GPS (em cada sessão foram utilizados 5 receptores de dupla frequência estacionados em 5 pilares). A primeira fase do processamento consistiu no ajustamento livre da rede fixando o vértice Melriça-TF4, de forma a detectar eventuais erros; como resultado do ajustamento da rede constrangida aos 11 pontos (fixos) da solução IBERIA95, num total de 126 pilares geodésicos (560 vectores), os valores máximos das elipses de confiança foram 5.5 cm para ambas as componentes, dentro dos valores esperados para este tipo de redes. O sistema PT-TM06/ETRS89 deverá substituir completamente os anteriormente usados, que se consideram obsoletos. Quando se observa uma rede local para efeitos de análise de deformação, a precisão necessária é muito superior à da rede geodésica existente, pelo que a adopção do *datum* nacional degrada os resultados. Instalam-se por esta razão redes locais independentes, sendo o *datum* seleccionado de uma forma optimizada para essa aplicação particular.

Para definir um sistema de referência (*datum*) é necessário fixar parâmetros do *datum*, em número igual ao *deficit* de característica da matriz dos coeficientes das equações de observação (isto é, elimina-se a indeterminação do sistema de equações de condição fixando alguns parâmetros). Uma condição importante na definição de um *datum* é que este não deve afectar a geometria da rede, sendo a posição relativa dos pontos definida exclusivamente a partir das observações geodésicas efectuadas, isto é, o *datum* não deve impor restrições ou constrangimentos às observações (no sentido em que se forem incluídas mais equações de constrangimento do que o mínimo indispensável, o problema de ajustamento torna-se constrangido e nesse caso as observações têm que se adaptar a esses constrangimentos, podendo acontecer, num caso limite, as observações serem de grande qualidade mas, por terem de adaptar-se a uma rede constrangida cujas estações têm as coordenadas mal calculadas (rede distorcida), virem a sofrer grandes correcções após o ajustamento). Convencionalmente tem-se:

- Rede a uma dimensão: define-se uma superfície de igual potencial como referência, fixando a altitude de um ponto da rede, no caso de linhas de nivelamento (ou o valor da gravidade, no caso de linhas de gravimetria). Na maior parte dos casos a escala da rede é obtida dos desníveis (diferenças de gravidade) observados; se a escala também for considerada como um parâmetro do *datum*, é necessário fixar um desnível entre dois pontos da rede (diferença de gravidade) para além da altitude (gravidade) de um dos pontos da rede.
- Rede a duas dimensões: define-se um sistema de coordenadas cartesiano fixando duas coordenadas de um ponto e o rumo (azimute) para um segundo ponto. Se não forem observadas distâncias, é necessário fixar uma distância entre dois pontos da rede. Neste último caso, como alternativa é possível fixar as coordenadas de dois pontos da rede.
- Rede a três dimensões: define-se um sistema de coordenadas cartesiano fixando três coordenadas de um ponto, um rumo (azimute) e dois ângulos zenitais. Sendo a escala um parâmetro do *datum*, então é necessário fixar uma distância. Como alternativa podem fixar-se as coordenadas de dois dos pontos da rede e um outro elemento adicional.

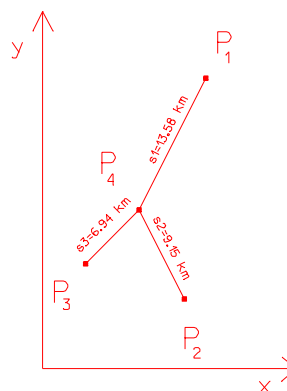
O problema do *datum* (**problema de ordem zero**) é a selecção do *datum* ou referencial local óptimo. Este problema resulta do facto de que as coordenadas dos pontos de uma rede não são determinadas de forma unívoca a partir de quantidades relativas como ângulos ou distâncias. O problema de ordem um é um problema de configuração, onde as posições dos pontos e as observações efectuadas são optimizadas. O problema dos pesos das observações numa configuração fixa é designado por problema de ordem dois, de tal forma que as estimativas das coordenadas exibam propriedades estatísticas previamente fixadas, como por exemplo, variância igual para todas as coordenadas ou estimativas não correlacionadas para as coordenadas. O problema de ordem três consiste na optimização de uma rede através da inclusão de novos pontos ou observações. Tem-se, assim:

Tipos de problemas envolvidos na concepção de redes de monitorização

	Parâmetros fixos	Parâmetros livres
Problema de ordem zero	B, W	x, Q _x
Problema de ordem um	W, Q _x	B
Problema de ordem dois	B, Q _x	W
Problema de ordem três	Q _x	B, W

Como exemplo de um problema de ordem três, considere-se o caso da densificação de uma rede através da inclusão do ponto P₄, utilizando para o efeito observações de distância, a partir das quais se coordena o novo ponto por trilateração. Tendo obtido as coordenadas do novo ponto, é possível calcular os rumos de P₄ para cada um dos pontos visados, por hipótese: $R_{P_4P_1} = 27^\circ$, $R_{P_4P_2} = 126^\circ$, $R_{P_4P_3} = 225^\circ$.

densificação de uma rede



Impondo como precisão pré-definida para as coordenadas de P₄ uma circunferência de raio 1cm (elipse de erro), isto é,

$$Q_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

tem-se que as equações que relacionam as observações com os parâmetros $X = \begin{bmatrix} \delta X_{P_4} \\ \delta Y_{P_4} \end{bmatrix}$ são do tipo

$$\ell^2 - (X_{P_4} - X_{P_i})^2 + (Y_{P_4} - Y_{P_i})^2 = 0 \quad \text{para } i=1,2,3$$

ou, na forma linearizada, considerando os pontos 1,2,3 fixos,

$$\ell - \ell_0 + v - \frac{X_{P_4}^0 - X_{P_i}}{\ell_0} \delta X_{P_4} - \frac{Y_{P_4}^0 - Y_{P_i}}{\ell_0} \delta Y_{P_4} = 0 \Leftrightarrow \ell - \ell_0 + v - \sin R_{P_4P_i} \delta X_{P_4} - \cos R_{P_4P_i} \delta Y_{P_4} = 0$$

ou seja,

$$B = \begin{bmatrix} -\sin R_{P_4P_1} & -\cos R_{P_4P_1} \\ -\sin R_{P_4P_2} & -\cos R_{P_4P_2} \\ -\sin R_{P_4P_3} & -\cos R_{P_4P_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.454 & -0.891 \\ -0.809 & +0.588 \\ +0.707 & +0.707 \end{bmatrix}.$$

Sendo

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}$$

a matriz dos pesos das observações, consideradas não correlacionadas, a matriz N tem a forma $N = B^T P B = Q_x^{-1}$, ou

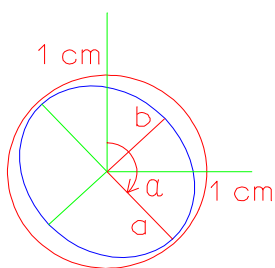
$$N = \begin{bmatrix} 0.206 p_1 + 0.654 p_2 + 0.5 p_3 & 0.404 p_1 - 0.476 p_2 + 0.5 p_3 \\ 0.404 p_1 - 0.476 p_2 + 0.5 p_3 & 0.794 p_1 + 0.346 p_2 + 0.5 p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de onde se obtém $p_1 = 0.511$, $p_2 = 0.974$, $p_3 = 0.515$.

Em seguida é necessário concretizar este design óptimo nas observações realizadas: supondo que o distanciómetro utilizado tem um desvio padrão $\sigma_D = 0.5 \text{ cm} + 1 \text{ ppm} = 0.5 \text{ cm} + 1 \times 10^{-6} \times D_{\text{cm}}$, o desvio padrão associado a cada uma das distâncias medidas é $\sigma_1 = 1.86 \text{ cm}$, $\sigma_2 = 1.42 \text{ cm}$, $\sigma_3 = 1.19 \text{ cm}$. Admitindo que observações repetidas da mesma distância são não correlacionadas, o desvio padrão da média aritmética de n medições é $\sigma = \sigma_D / \sqrt{n}$, cujo peso é $p = \sigma_0^2 / \sigma^2 = n \sigma_0^2 / \sigma_D^2$. Tomando $\sigma_0 = 1 \text{ cm}$, o número de repetições de cada distância é, respectivamente, 1.76, 1.96, 0.73 ou, arredondando para números inteiros, 2, 2, 1. Estas repetições conduzem ao desvio padrão para os valores médios das distâncias: 1.32 cm, 1.01 cm e 1.19 cm, a que correspondem os pesos 0.57, 1.00 e 0.71. Com estes pesos recalculam-se as matrizes N e Q:

$$N = \begin{bmatrix} 1.13 & 0.11 \\ 0.11 & 1.15 \end{bmatrix} \text{ e } N^{-1} = Q = \begin{bmatrix} 0.89 & -0.08 \\ -0.08 & 0.88 \end{bmatrix}.$$

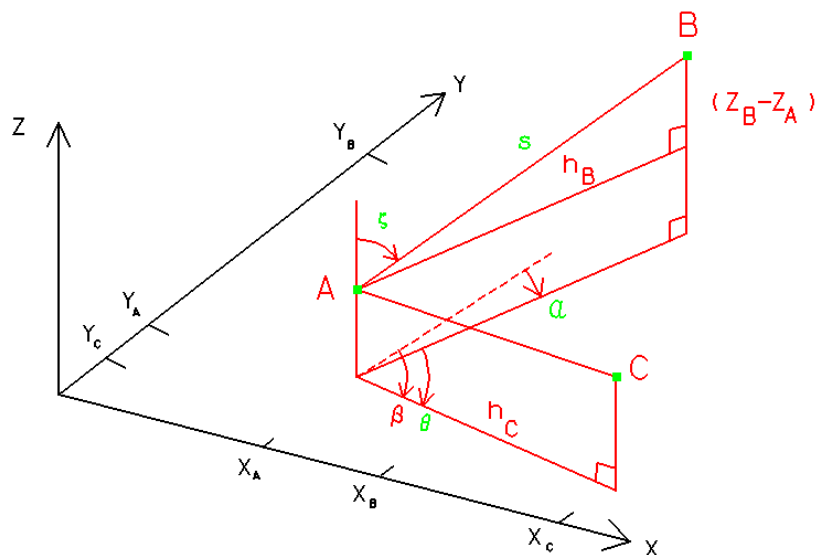
A partir dos elementos da matriz Q obtêm-se os parâmetros da elipse: $a=0.96 \text{ cm}$, $b=0.80 \text{ cm}$, $\alpha = 133.2^\circ$:



A elipse de erro da rede com observações com pesos modificados fica completamente contida no círculo de raio 1 cm

10. Equações de observação mais comuns no caso de observação de redes geodésicas ou topográficas

Apresentam-se de seguida as equações de observação mais comuns no caso de observação de redes geodésicas ou topográficas, assim como a respectiva versão linearizada:



Representação gráfica das medições de distância inclinada s , rumo α , ângulo azimutal θ e ângulo zenital ζ

1. Equação de observação para a distância inclinada s :

Se a distância inclinada s entre os pontos $A(X_A, Y_A, Z_A)$ e $B(X_B, Y_B, Z_B)$ for medida, o modelo funcional é

$$F(\vec{x}, \vec{\ell}) = [(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2]^{1/2} - s = 0$$

onde $\vec{x} = [X_A \ Y_A \ Z_A \ X_B \ Y_B \ Z_B]^T$ e $\vec{\ell} = [-s]$. Sendo $[X_0^A \ Y_0^A \ Z_0^A \ X_0^B \ Y_0^B \ Z_0^B]^T$ valores aproximados para as coordenadas dos 2 pontos, $\Delta\vec{x}_{6 \times 1} = [\delta X_A \ \delta Y_A \ \delta Z_A \ \delta X_B \ \delta Y_B \ \delta Z_B]^T$ as correcções introduzidas nas coordenadas durante as sucessivas iterações do ajustamento, então

$$B_{1 \times 6} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial X_A} \\ \frac{\partial F}{\partial Y_A} \\ \frac{\partial F}{\partial Z_A} \\ \frac{\partial F}{\partial X_B} \\ \frac{\partial F}{\partial Y_B} \\ \frac{\partial F}{\partial Z_B} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{X_A - X_B}{[(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2]^{1/2}} \\ \frac{Y_A - Y_B}{[(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2]^{1/2}} \\ \frac{Z_A - Z_B}{[(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2]^{1/2}} \\ \frac{X_B - X_A}{[(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2]^{1/2}} \\ \frac{Y_B - Y_A}{[(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2]^{1/2}} \\ \frac{Z_B - Z_A}{[(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2]^{1/2}} \end{bmatrix}^T$$

$$A = \left[\frac{\partial F}{\partial s} \right] = [-1]$$

e a equação linearizada tem a forma $A\vec{\Delta} + B\Delta\vec{x} - s + s_0 = 0$, ou

$$\frac{X_A^0 - X_B^0}{s_0} \delta X_A + \frac{Y_A^0 - Y_B^0}{s_0} \delta Y_A + \frac{Z_A^0 - Z_B^0}{s_0} \delta Z_A + \frac{X_B^0 - X_A^0}{s_0} \delta X_B + \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{s_0} \delta Y_B + \frac{Z_B^0 - Z_A^0}{s_0} \delta Z_B = s - s_0 + v$$

com $s_0 = [(X_A^0 - X_B^0)^2 + (Y_A^0 - Y_B^0)^2 + (Z_A^0 - Z_B^0)^2]^{1/2}$ sendo a distância espacial calculada entre os dois pontos a partir dos valores aproximados das coordenadas.

2. Equação de observação para o rumo α :

Se o rumo α entre os pontos $A(X_A, Y_A, Z_A)$ e $B(X_B, Y_B, Z_B)$ for medido, o modelo funcional é

$$F(\vec{x}, \vec{\ell}) = a \tan \frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A} - \alpha = 0$$

onde $\vec{x} = [X_A \ Y_A \ X_B \ Y_B]^T$ e $\vec{\ell} = [-\alpha]$. Sendo $[X_A^0 \ Y_A^0 \ X_B^0 \ Y_B^0]^T$ valores aproximados para as coordenadas dos 2 pontos e $\vec{\Delta}_{4 \times 1} = [\delta X_A \ \delta Y_A \ \delta X_B \ \delta Y_B]^T$ as correcções introduzidas nas coordenadas durante as sucessivas iterações do ajustamento e, lembrando que $\frac{\partial}{\partial x} \arctan u = \frac{1}{1+u^2} \frac{\partial u}{\partial x}$ tem-se

$$B_{1 \times 4} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial X_A} \\ \frac{\partial F}{\partial Y_A} \\ \frac{\partial F}{\partial X_B} \\ \frac{\partial F}{\partial Y_B} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\frac{Y_B - Y_A}{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \\ \frac{X_B - X_A}{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \\ -\frac{Y_B - Y_A}{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \\ \frac{X_B - X_A}{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \end{bmatrix}^T \quad A = \left[\frac{\partial F}{\partial \alpha} \right] = [-1]$$

e a equação linearizada tem a forma

$$Av + B\vec{\Delta} - \alpha + \alpha_0 = 0$$

ou

$$-\frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}^2} \delta X_A + \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}^2} \delta Y_A + \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}^2} \delta X_B - \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}^2} \delta Y_B = (\alpha - \alpha_0) + v$$

com $h_{0AB}^2 = (X_A^0 - X_B^0)^2 + (Y_A^0 - Y_B^0)^2$ sendo a distância horizontal entre os dois pontos A e B calculada a partir dos valores aproximados das coordenadas.

3. Equação de observação para o ângulo azimutal θ :

Se o ângulo azimutal θ for medido no ponto A, no sentido retrógrado, de B para C, então $\theta = \beta - \alpha$, onde α e β são os rumos de AC e AB, respectivamente. O modelo funcional é:

$$F(\vec{x}, \vec{\ell}) = \arctan \frac{X_C - X_A}{Y_C - Y_A} - \arctan \frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A} - \theta = 0$$

onde $\vec{x} = [X_A \ Y_A \ X_B \ Y_B \ X_C \ Y_C]^T$, $\vec{\ell} = [-\theta]$. Sendo $[X_A^0 \ Y_A^0 \ X_B^0 \ Y_B^0 \ X_C^0 \ Y_C^0]^T$ valores aproximados para as coordenadas dos 3 pontos e $\vec{\Delta}_{6 \times 1} = [\delta X_A \ \delta Y_A \ \delta X_B \ \delta Y_B \ \delta X_C \ \delta Y_C]^T$ as correcções introduzidas nas coordenadas durante as sucessivas iterações do ajustamento:

$$B_{1 \times 6} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial X_A} \\ \frac{\partial F}{\partial Y_A} \\ \frac{\partial F}{\partial X_B} \\ \frac{\partial F}{\partial Y_B} \\ \frac{\partial F}{\partial X_C} \\ \frac{\partial F}{\partial Y_C} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\frac{Y_C - Y_A}{(X_C - X_A)^2 + (Y_C - Y_A)^2} + \frac{Y_B - Y_A}{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \\ \frac{X_C - X_A}{(X_C - X_A)^2 + (Y_C - Y_A)^2} - \frac{X_B - X_A}{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \\ -\frac{Y_B - Y_A}{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \\ \frac{X_B - X_A}{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \\ \frac{Y_C - Y_A}{(X_C - X_A)^2 + (Y_C - Y_A)^2} \\ -\frac{X_C - X_A}{(X_C - X_A)^2 + (Y_C - Y_A)^2} \end{bmatrix}^T \quad A = \left[\frac{\partial F}{\partial \theta} \right] = [-1]$$

a equação linearizada tem a forma

$$Av + B\vec{\Delta} - \theta + \theta_0 = 0$$

ou

$$\left(\frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}^2} - \frac{Y_C^0 - Y_A^0}{h_{0AC}^2} \right) \delta X_A + \left(\frac{X_C^0 - X_A^0}{h_{0AC}^2} - \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}^2} \right) \delta Y_A - \frac{(Y_B^0 - Y_A^0)}{h_{0AB}^2} \delta X_B + \frac{(X_B^0 - X_A^0)}{h_{0AB}^2} \delta Y_B + \frac{(Y_C^0 - Y_A^0)}{h_{0AC}^2} \delta X_C - \frac{(X_C^0 - X_A^0)}{h_{0AC}^2} \delta Y_C = \theta - \theta_0 + v$$

com $h_{0AB}^2 = (X_0^A - X_0^B)^2 + (Y_0^A - Y_0^B)^2$ e $h_{0AC}^2 = (X_0^A - X_0^C)^2 + (Y_0^A - Y_0^C)^2$ sendo a distância horizontal entre os dois pontos A e B e entre os pontos A e C calculada a partir dos valores aproximados das coordenadas.

4. Equação de observação para o ângulo zenital ζ :

Sendo ζ o ângulo zenital medido entre A e B, o modelo funcional é:

$$F(\vec{x}, \vec{\ell}) = a \cos \left[\frac{Z_B - Z_A}{[(X_A - X_B)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2]^{1/2}} \right] - \zeta = 0$$

onde $\vec{x} = [X_A \ Y_A \ Z_A \ X_B \ Y_B \ Z_B]^T$ e $\vec{\ell} = [-\zeta]$; sendo $(X_A^0, Y_A^0, Z_A^0, X_B^0, Y_B^0, Z_B^0)$ valores aproximados para as coordenadas dos 2 pontos e $\vec{\Delta}_{6 \times 1} = [\delta X_A \ \delta Y_A \ \delta Z_A \ \delta X_B \ \delta Y_B \ \delta Z_B]^T$ as correcções introduzidas nas coordenadas durante as sucessivas iterações do ajustamento, tem-se, lembrando que $\frac{\partial}{\partial x} a \cos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{\partial u}{\partial x}$:

$$B_{1 \times 6} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial X_A} \\ \frac{\partial F}{\partial Y_A} \\ \frac{\partial F}{\partial Z_A} \\ \frac{\partial F}{\partial X_B} \\ \frac{\partial F}{\partial Y_B} \\ \frac{\partial F}{\partial Z_B} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{Z_B - Z_A}{\sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2}} \frac{X_A - X_B}{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2} \\ \frac{Z_B - Z_A}{\sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2}} \frac{Y_A - Y_B}{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2} \\ - \frac{\sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2}}{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2} \\ - \frac{Z_B - Z_A}{\sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2}} \frac{X_A - X_B}{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2} \\ - \frac{Z_B - Z_A}{\sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2}} \frac{Y_A - Y_B}{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2} \\ \frac{\sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2}}{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2} \end{bmatrix}^T \quad A = \left[\frac{\partial F}{\partial \zeta} \right] = [-1]$$

a equação linearizada tem a forma

$$Av + B\vec{\Delta} - \zeta + \zeta_0 = 0$$

ou

$$-\frac{X_B^0 - X_A^0}{s_0^2 \tan \zeta_0} \delta X_A - \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{s_0^2 \tan \zeta_0} \delta Y_A + \frac{h_0}{s_0^2} \delta Z_A + \frac{X_B^0 - X_A^0}{s_0^2 \tan \zeta_0} \delta X_B + \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{s_0^2 \tan \zeta_0} \delta Y_B - \frac{h_0}{s_0^2} \delta Z_B = \zeta - \zeta_0 + v$$

5. Equação de observação para a direcção azimutal ℓ :

Se ℓ for a direcção azimutal observada no ponto A para o ponto B, tem-se:

$$R_{AB}^{\text{ajustado}} = R_{AB}^{\text{calculado}} - \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}^2} \delta X_A + \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}^2} \delta Y_A + \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}^2} \delta X_B - \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}^2} \delta Y_B,$$

correspondendo estes últimos termos à variação do rumo de A para B para pequenos deslocamentos de A e B. Tem-se, por outro lado:

$$R_{AB}^{\text{ajustado}} = \ell + R_A^0$$

onde R_A^0 é o rumo do zero da graduação azimutal na estação A. Assim:

$$R_{AB}^{\text{calculado}} - \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}^2} \delta X_A + \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}^2} \delta Y_A + \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}^2} \delta X_B - \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}^2} \delta Y_B = \ell + R_A^0.$$

Pondo $R_A^0 = \bar{R}_A^0 + \delta R_A^0$, tem-se:

$$-\delta R_A^0 - \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}^2} \delta X_A + \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}^2} \delta Y_A + \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}^2} \delta X_B - \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}^2} \delta Y_B = \ell + \bar{R}_A^0 - R_{AB}^{\text{calculado}}$$

em que a incógnita δR_A^0 é a mesma para todas as direcções definidas a partir da estação A.

11. Definição de um *datum* através de uma base com variância nula

Um *datum* fisicamente realizado consiste nos seguintes princípios:

- 1) um referencial que se identifica com a realidade física (que se materializa) através da ligação a um conjunto de pontos convenientemente monumentalizados
- 2) a matriz de variâncias-covariâncias dos parâmetros depende de uma base com variância nula convenientemente identificada, definida como um subconjunto dos pontos da rede

Considerando uma rede geodésica representada pelo modelo $\vec{\ell}^{n \times 1} + \vec{u}^{n \times 1} = B^{n \times u} \vec{x}^{u \times 1}$, onde a matriz B tem *deficit* de característica igual a d, a forma convencional de definir o *datum* consiste em eliminar a(s) coluna(s) da matriz B dos coeficientes dos parâmetros que se refere(m) ao(s) parâmetro(s) considerado(s) fixo(s) e portanto cuja variância é nula, isto é, no decorrer do processo iterativo não há alteração do valor desse(s) parâmetro(s).

Se o modelo anterior sofrer uma partição segundo este conceito, ou seja, $[\vec{x}]^T = [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2]^T$, em que se supõe para simplificar a escrita que os parâmetros que se fixam ocupam as últimas d posições do vector dos parâmetros, (o que significa que as coordenadas aproximadas de $\vec{x}_2$ permanecem inalteradas durante o processo iterativo) :

$$\vec{\ell}^{n \times 1} + \vec{u}^{n \times 1} = B^{n \times u} \vec{x}^{u \times 1} = \begin{bmatrix} B_1^{n \times (u-d)} & B_2^{n \times d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}_1^{(u-d) \times 1} \\ \vec{x}_2^{d \times 1} \end{bmatrix} = B_1^{n \times (u-d)} \vec{x}_1^{(u-d) \times 1} + B_2^{n \times d} \vec{x}_2^{d \times 1}$$

onde as d componentes de $\vec{x}_2$ definem o *datum*. As colunas da matriz B_2 , em número d, são uma combinação linear das colunas da matriz B_1 , ou seja, existe uma matriz L tal que

$$B_1^{n \times (u-d)} L^{(u-d) \times d} = B_2^{n \times d}$$

isto é,

$$B_1^{n \times (u-d)} L^{(u-d) \times d} - B_2^{n \times d} = \begin{bmatrix} B_1^{n \times (u-d)} & B_2^{n \times d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^{(u-d) \times d} \\ -I_{d \times d} \end{bmatrix} = 0,$$

com I_d sendo a matriz identidade de dimensão d, o que é uma generalização da relação $A\vec{\lambda} = \vec{0}$. Utilizando a expressão anterior, tem-se:

$$\vec{\ell}^{n \times 1} + \vec{u}^{n \times 1} = B_1^{n \times (u-d)} \vec{x}_1^{(u-d) \times 1} + B_1^{n \times (u-d)} L^{(u-d) \times d} \vec{x}_2^{d \times 1},$$

ou

$$\vec{\ell}^{n \times 1} + \vec{u}^{n \times 1} - B_1^{n \times (u-d)} L^{(u-d) \times d} \vec{x}_2^{d \times 1} = B_1^{n \times (u-d)} \vec{x}_1^{(u-d) \times 1}$$

que é um modelo de característica completa ou regular (não singular, portanto) cuja solução é dada por:

$$\delta \vec{x}_2^{d \times 1} = \vec{0} \text{ (parâmetros fixos ao longo do ajustamento)}$$

$$Q_{\vec{x}_2} = 0 \text{ (variância zero para os parâmetros considerados fixos)}$$

$$\vec{x}_1^{(u-d) \times 1} = (B_1^T (u-d) \times n \ P \ n \times n \ B_1^{n \times (u-d)})^{-1} B_1^T (u-d) \times n \ P \ n \times n (\vec{\ell}^{n \times 1} - B_2 \vec{x}_2)$$

$$Q_{\vec{x}_1} = (B_1^T P B_1)^{-1}$$

$$Q_{\vec{x}_1 \vec{x}_2} = 0$$

No caso de um modelo com equações lineares, considerando $\vec{x}_2 = 0$, a solução é dada por

$$\vec{x}_1^{(u-d) \times 1} = (B_1^T (u-d) \times n \ P \ n \times n \ B_1^{n \times (u-d)})^{-1} B_1^T (u-d) \times n \ P \ n \times n \vec{\ell}^{n \times 1};$$

No caso de um modelo com equações linearizadas, em cada iteração calcula-se o acréscimo aos parâmetros com

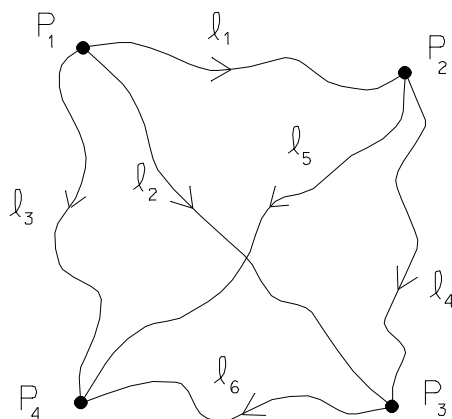
$$\delta \vec{x}_1^{(u-d) \times 1} = (B_1^T (u-d) \times n \ P \ n \times n \ B_1^{n \times (u-d)})^{-1} B_1^T (u-d) \times n \ P \ n \times n \vec{f}^{n \times 1}, \vec{W} = \ell_o - \ell_c,$$

seguido por

$$\vec{x}_1 = \delta \vec{x}_1^0 - L \vec{x}_1.$$

Fixados o(s) ponto(s) do *datum*, as matrizes cofactor $Q_{\vec{x}_1}$ e $Q_{\vec{x}_1 \vec{x}_2}$ são independentes da selecção dos valores numéricos de $\vec{x}_2$; no entanto, estas matrizes dependem fortemente de que ponto(s) se tomou como *datum*. Esta abordagem tem a vantagem de conduzir a uma matriz normal de dimensão baixa, economizando tempo de cálculo mas está restringida ao caso especial da definição do *datum* por fixação de d componentes do vector $\vec{x}$.

Exemplo de rede 1D: considere-se a seguinte rede local de nivelamento constituída pelos pontos P_1, P_2, P_3, P_4 , de altitudes respectivamente C_1, C_2, C_3, C_4 , sendo as linhas de nivelamento aproximadamente do mesmo comprimento. As equações de observação são (modelo paramétrico):



$$\begin{cases} \ell_1 + v_1 = C_2 - C_1 = 1.2 \text{ mm} \\ \ell_2 + v_2 = C_3 - C_1 = 1.6 \text{ mm} \\ \ell_3 + v_3 = C_4 - C_1 = 1.7 \text{ mm} \\ \ell_4 + v_4 = C_3 - C_2 = 1.2 \text{ mm} \\ \ell_5 + v_5 = C_4 - C_2 = 2.1 \text{ mm} \\ \ell_6 + v_6 = C_4 - C_3 = 1.3 \text{ mm} \end{cases}$$

Rede de nivelamento geométrico

O modelo aplicado é representado por: $\vec{\ell}_{6,1} + \vec{v}_{6,1} = B_{6,4} \vec{x}_{4,1}$, $B_{6,4} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{\ell}_{6,1} = \begin{bmatrix} 0.0012 \\ 0.0016 \\ 0.0017 \\ 0.0012 \\ 0.0021 \\ 0.0013 \end{bmatrix}$.

Supondo que as observações são não correlacionadas e de precisão igual a ± 1 mm, $\sigma_0^2 = 1$, tem-se:

$$\Sigma_{\text{obs}} = 1.0 \times 10^{-6} \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix} \text{ m}^2, \quad Q_{\text{obs}} = 1.0 \times 10^{-6} \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$P_{\text{obs}} = 1.0 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

sendo a matriz normal é dada por

$$N_{4,4} = A_{4,6}^T P_{6,6} A_{6,4} = 1.0 \times 10^6 \begin{bmatrix} 3.0000 & -1.0000 & -1.0000 & -1.0000 \\ -1.0000 & 3.0000 & -1.0000 & -1.0000 \\ -1.0000 & -1.0000 & 3.0000 & -1.0000 \\ -1.0000 & -1.0000 & -1.0000 & 3.0000 \end{bmatrix} \text{ que sendo singular, não é invertível (d=4-3=1).}$$

a) Mantendo a altitude do ponto P_4 fixa ao longo do ajustamento, por exemplo 101.0000 m (utilizando um valor arbitrário ou ligando a rede local à rede nacional através de nivelamento geométrico a partir de uma marca de nivelamento), este ponto é escolhido como *datum* numa rede de constrangimento mínimo. Isto traduz-se em que a 4ª coluna da matriz B, referente a x_4 , é eliminada, obtendo-se a seguinte matriz B_1 com *deficit* de característica $d=0$:

$$B^{6,4} = [B_1^{6,3} \quad B_2^{6,1}] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_{4,1} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1^{3,1} \\ \bar{x}_2^{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}, \quad C_4 = 101.0000 \text{ m}.$$

Para obter a estimativa do vector dos parâmetros utiliza-se a expressão $\bar{x}_1^{3,1} = (B_1^{3,6T} I_{6,6} B_1^{6,3})^{-1} B_1^{3,6T} P_{6,6} (\bar{\ell}^{6,1} - B_2^{6 \times 1} \bar{x}_2^{1,1})$ juntamente com a informação estatística seguinte, isto é:

$$\bar{x}_2 = [101.0000], \quad L = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 100.9976 \\ 100.9982 \\ 100.9991 \end{bmatrix} \rightarrow \text{altitudes dos pontos } P_1, P_2 \text{ e } P_3, \quad Q_{\text{par}} = 1.0 \times 10^{-6} \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.2500 & 0.2500 \\ 0.2500 & 0.5000 & 0.2500 \\ 0.2500 & 0.2500 & 0.5000 \end{bmatrix},$$

$$\bar{v} = 1.0 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.6000 \\ -0.1000 \\ 0.7000 \\ -0.3000 \\ -0.3000 \\ -0.4000 \end{bmatrix}, \quad Q_{\text{res}} = 1.0 \times 10^{-6} \begin{bmatrix} 0.5000 & -0.2500 & -0.2500 & 0.2500 & 0.2500 & 0 \\ -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 & -0.2500 & 0 & 0.2500 \\ -0.2500 & -0.2500 & 0.5000 & 0 & -0.2500 & -0.2500 \\ 0.2500 & -0.2500 & 0 & 0.5000 & -0.2500 & 0.2500 \\ 0.2500 & 0 & -0.2500 & -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 \\ 0 & 0.2500 & -0.2500 & 0.2500 & -0.2500 & 0.5000 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\ell}_{\text{ajus}} = \begin{bmatrix} 0.0006 \\ 0.0015 \\ 0.0024 \\ 0.0009 \\ 0.0018 \\ 0.0009 \end{bmatrix}, \quad Q_{\text{obsajust}} = 1.0 \times 10^{-6} \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.2500 & 0.2500 & -0.2500 & -0.2500 & 0 \\ 0.2500 & 0.5000 & 0.2500 & 0.2500 & 0 & -0.2500 \\ 0.2500 & 0.2500 & 0.5000 & 0 & 0.2500 & 0.2500 \\ -0.2500 & 0.2500 & 0 & 0.5000 & 0.2500 & -0.2500 \\ -0.2500 & 0 & 0.2500 & 0.2500 & 0.5000 & 0.2500 \\ 0 & -0.2500 & 0.2500 & -0.2500 & 0.2500 & 0.5000 \end{bmatrix}.$$

$$v^T v = 1.2 \text{ mm}^2, \quad s_0^2 = \frac{v^T v}{n - u + d} = \frac{1.2 \text{ mm}^2}{6 - 4 + 1} = 0.4 \text{ mm}^2, \quad \text{tr}(Q_{\text{par}}) = 1.5 \times 10^{-6}, \quad \Sigma_{\text{par}} = s_0^2 Q_{\text{par}}.$$

b) Caso se considere que as observações são não correlacionadas mas de precisão diferente, uma situação mais comum, tem-se, por exemplo para a seguinte matriz de variâncias-covariâncias:

$$\Sigma_{\text{obs}} = 1.0 \times 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.0100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0225 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0400 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0900 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1225 \end{bmatrix} \text{ m}^2,$$

$$Q_{\text{obs}} = 1.0 \times 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.0100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0225 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0400 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0900 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1225 \end{bmatrix} \text{ m}^2$$

$$P_{\text{obs}} = 1.0 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4444 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1600 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1111 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0816 \end{bmatrix}$$

sendo a matriz normal é dada por

$$N_{4,4} = B_{4,6}^T P_{6,6} B_{6,4} = 1.0 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1.6944 & -1.0000 & -0.4444 & -0.2500 \\ -1.0000 & 1.2711 & -0.1600 & -0.1111 \\ -0.4444 & -0.1600 & 0.6861 & -0.0816 \\ -0.2500 & -0.1111 & -0.0816 & 0.4427 \end{bmatrix} \text{ que sendo singular, não é invertível (d=4-3=1).}$$

Mantendo o ponto P_4 como *datum*, com cota igual a 101.0000 m, tem-se:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_2 = [101.0000], \quad L = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 100.9977 \\ 100.9987 \\ 100.9994 \end{bmatrix} \rightarrow \text{altitudes dos pontos } P_1, P_2 \text{ e } P_3, \quad Q_{\text{par}} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.2385 & 0.2133 & 0.2042 \\ 0.2133 & 0.2719 & 0.2016 \\ 0.2042 & 0.2016 & 0.3251 \end{bmatrix},$$

$$\vec{v} = 1.0 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.1798 \\ 0.0722 \\ 0.5910 \\ -0.5480 \\ -0.8292 \\ -0.6812 \end{bmatrix}, Q_{\text{res}} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0163 & -0.0225 & -0.0252 & 0.0612 & 0.0585 & -0.0026 \\ -0.0225 & 0.0699 & -0.0342 & -0.1326 & -0.0117 & 0.1208 \\ -0.0252 & -0.0342 & 0.1615 & -0.0091 & -0.2133 & -0.2042 \\ 0.0612 & -0.1326 & -0.0091 & 0.4312 & -0.0703 & 0.1235 \\ 0.0585 & -0.0117 & -0.2133 & -0.0703 & 0.6281 & -0.2016 \\ -0.0026 & 0.1208 & -0.2042 & 0.1235 & -0.2016 & 0.8999 \end{bmatrix},$$

$$\vec{\ell}_{\text{ajus}} = \begin{bmatrix} 0.0010 \\ 0.0017 \\ 0.0023 \\ 0.0007 \\ 0.0013 \\ 0.0006 \end{bmatrix}, Q_{\text{obsajust}} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0837 & 0.0225 & 0.0252 & -0.0612 & -0.0585 & 0.0026 \\ 0.0225 & 0.1551 & 0.0342 & 0.1326 & 0.0117 & -0.1208 \\ 0.0252 & 0.0342 & 0.2385 & 0.0091 & 0.2133 & 0.2042 \\ -0.0612 & 0.1326 & 0.0091 & 0.1938 & 0.0703 & -0.1235 \\ -0.0585 & 0.0117 & 0.2133 & 0.0703 & 0.2719 & 0.2016 \\ 0.0026 & -0.1208 & 0.2042 & -0.1235 & 0.2016 & 0.3251 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{v}^T \vec{v} = 1.84 \text{ mm}^2, s_0^2 = \frac{\vec{v}^T \vec{v}}{n - u + d} = \frac{1.84 \text{ mm}^2}{6 - 4 + 1} = 0.61 \text{ mm}^2, \text{tr}(Q_{\text{par}}) = 0.8355 \times 10^{-5}, \Sigma_{\text{par}} = s_0^2 Q_{\text{par}}.$$

Como se poderia prever, a mudança nos pesos das observações teve consequências não só a nível dos valores obtidos para os parâmetros como para toda a informação estatística associada, em particular a relativa à matriz cofactor dos parâmetros (razão pela qual é necessário um cuidado especial na atribuição dos pesos correctos às observações).

c) De seguida, importa refazer o cálculo mantendo os últimos pesos das observações mas alterando o ponto tomado como *datum*; considere-se assim o ponto P_1 como *datum*, ao qual se vai atribuir a cota 202.0000 m (ou qualquer outro valor definido de forma arbitrária (como por exemplo a cota obtida para P_1 no cálculo precedente, 100.9977 m) ou através de nivelamento geométrico a partir de uma marca de nivelamento da rede nacional):

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_2 = [202.0000], \quad L = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P_{\text{obs}} = 1.0 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4444 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1600 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1111 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.08166 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 202.0010 \\ 202.0017 \\ 202.0023 \end{bmatrix} \rightarrow \text{altitudes dos pontos } P_2, P_3 \text{ e } P_4,$$

$$Q_{\text{par}} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0837 & 0.0225 & 0.0252 \\ 0.0225 & 0.1551 & 0.0342 \\ 0.0252 & 0.0342 & 0.2385 \end{bmatrix}, \quad \bar{v} = 1.0 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.1798 \\ 0.0722 \\ 0.5910 \\ -0.5480 \\ -0.8292 \\ -0.6812 \end{bmatrix},$$

$$Q_{\text{res}} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0163 & -0.0225 & -0.0252 & 0.0612 & 0.0585 & -0.0026 \\ -0.0225 & 0.0699 & -0.0342 & -0.1326 & -0.0117 & 0.1208 \\ -0.0252 & -0.0342 & 0.1615 & -0.0091 & -0.2133 & -0.2042 \\ 0.0612 & -0.1326 & -0.0091 & 0.4312 & -0.0703 & 0.1235 \\ 0.0585 & -0.0117 & -0.2133 & -0.0703 & 0.6281 & -0.2016 \\ -0.0026 & 0.1208 & -0.2042 & 0.1235 & -0.2016 & 0.8999 \end{bmatrix}, \quad \bar{\ell}_{\text{ajus}} = \begin{bmatrix} 0.0010 \\ 0.0017 \\ 0.0023 \\ 0.0007 \\ 0.0013 \\ 0.0006 \end{bmatrix},$$

$$Q_{\text{obsajust}} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0837 & 0.0225 & 0.0252 & -0.0612 & -0.0585 & 0.0026 \\ 0.0225 & 0.1551 & 0.0342 & 0.1326 & 0.0117 & -0.1208 \\ 0.0252 & 0.0342 & 0.2385 & 0.0091 & 0.2133 & 0.2042 \\ -0.0612 & 0.1326 & 0.0091 & 0.1938 & 0.0703 & -0.1235 \\ -0.0585 & 0.0117 & 0.2133 & 0.0703 & 0.2719 & 0.2016 \\ 0.0026 & -0.1208 & 0.2042 & -0.1235 & 0.2016 & 0.3251 \end{bmatrix}.$$

$$v^T v = 1.84 \text{ mm}^2, s_0^2 = \frac{v^T v}{n - u + d} = \frac{1.84 \text{ mm}^2}{6 - 4 + 1} = 0.61 \text{ mm}^2, \text{tr}(Q_{\text{par}}) = 0.4773 \times 10^{-5}, \Sigma_{\text{par}} = s_0^2 Q_{\text{par}}.$$

A mudança de *datum*, para além da alteração óbvia nos parâmetros, isto é, nas altitudes, reflectiu-se na matriz cofactor dos parâmetros; a restante informação estatística relativa aos resíduos, observações ajustadas e respectivas matrizes cofactor manteve-se. Caso tivesse sido tomado para cota do ponto considerado como *datum* o valor $P_1=100.9977$ (a cota obtida em b) para P_1), as altitudes dos restantes pontos seriam $P_2=100.9987$, $P_3=100.9994$, $P_4=101.000$, isto é, o valor dos parâmetros não se alterava mas a matriz cofactor seria diferente! Não é portanto indiferente a escolha do *datum*, mesmo nesta situação em que não há alteração do valor das altitudes, implicando a alteração do ponto origem da rede a variação da precisão das altitudes.

A posição relativa dos pontos ajustados numa rede de constrangimento mínimo é invariante e forma uma estrutura rígida. Quer isto dizer que independentemente do *datum* adoptado, embora as coordenadas dos pontos da rede variem de caso para caso, as distâncias ajustadas e os ângulos ajustados não variam.

d) Os exemplos anteriores traduziram-se na fixação da cota de um único ponto como *datum* numa rede 1D, suficiente para a resolução do *deficit* de característica do sistema de equações, obtendo-se desta forma uma rede com constrangimento mínimo. Mantendo as altitudes dos pontos P_3 e P_4 fixas ao longo do ajustamento, estes pontos são escolhidos como novo *datum* numa rede constrangida (com um constrangimento superior ao estritamente necessário para eliminar o *deficit* de característica da rede. Tem-se então que as duas últimas colunas da matriz A, referentes a x_3 e a x_4 , são eliminadas, obtendo-se a seguinte matriz com *deficit* de característica $d=0$:

$$B^{6,4} = [B_1^{6,2} \quad B_2^{6,2}] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} [\bar{x}_1^{2,1}] \\ [\bar{x}_2^{2,1}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [C_1] \\ [C_2] \\ [C_3] \\ [C_4] \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 500.9994 \\ 501.0000 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_1^{2,1} = (B_1^{2,6T} P_{6,6} B_1^{6,2})^{-1} B_1^{2,6T} P_{6,6} (\bar{\ell}^{6,1} - B_2^{6 \times 2} \bar{x}_2^{2,1}) = \begin{bmatrix} 500.9977 \\ 500.9987 \end{bmatrix} \rightarrow \text{altitudes dos pontos 1 e 2,}$$

$$Q_{\text{par}} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.1102 & 0.0867 \\ 0.0867 & 0.1469 \end{bmatrix},$$

$$\bar{v} = 1.0 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.1800 \\ 0.0792 \\ 0.5792 \\ -0.5409 \\ -0.8409 \\ -0.7000 \end{bmatrix}, \quad Q_{\text{res}} = 1.0 \times 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.0016 & -0.0023 & -0.0023 & 0.0060 & 0.0060 & 0 \\ -0.0023 & 0.0115 & -0.0110 & -0.0087 & -0.0087 & 0 \\ -0.0023 & -0.0110 & 0.0290 & -0.0087 & -0.0087 & 0 \\ 0.0060 & -0.0087 & -0.0087 & 0.0478 & -0.0147 & 0 \\ 0.0060 & -0.0087 & -0.0087 & -0.0147 & 0.0753 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1225 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\ell}_{\text{ajus}} = \begin{bmatrix} 0.0010 \\ 0.0017 \\ 0.0023 \\ 0.0007 \\ 0.0013 \\ 0.0006 \end{bmatrix}, \quad Q_{\text{obsajust}} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0837 & 0.0235 & 0.0235 & -0.0602 & -0.0602 & 0 \\ 0.0235 & 0.1102 & 0.1102 & 0.0867 & 0.0867 & 0 \\ 0.0235 & 0.1102 & 0.1102 & 0.0867 & 0.0867 & 0 \\ -0.0602 & 0.0867 & 0.0867 & 0.1469 & 0.1469 & 0 \\ -0.0602 & 0.0867 & 0.0867 & 0.1469 & 0.1469 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v^T v = 1.86 \text{ mm}^2, \quad s_0^2 = \frac{v^T v}{n - u + d} = \frac{1.86 \text{ mm}^2}{6 - 4 + 1} = 0.62 \text{ mm}^2, \quad \text{tr}(Q_{\text{par}}) = 0.2571 \times 10^{-5}, \quad \Sigma_{\text{par}} = s_0^2 Q_{\text{par}}.$$

Neste caso, as altitudes de P_3 e P_4 não podem ser escolhidas de forma arbitrária, devendo a equação de constrangimento que relaciona os dois parâmetros corresponder à realidade física que é o desnível entre ambos os pontos: caso contrário, para verificar o constrangimento os resíduos das observações tornam-se muito grandes, de forma a adaptarem-se à rede.

$$B^{6,4} = [B_1^{6,2} \quad B_2^{6,2}] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} [\bar{x}_1^{2,1}] \\ [\bar{x}_2^{2,1}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [C_1] \\ [C_2] \\ [C_3] \\ [C_4] \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 510.9994 \\ 501.0000 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_1^{2,1} = (B_1^{2,6T} P_{6,6} B_1^{6,2})^{-1} B_1^{2,6T} P_{6,6} (\bar{\ell}^{6,1} - B_2^{6 \times 2} \bar{x}_2^{2,1}) = \begin{bmatrix} 507.2806 \\ 507.2003 \end{bmatrix} \rightarrow \text{altitudes dos pontos 1 e 2,}$$

$$Q_{\text{par}} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.1102 & 0.0867 \\ 0.0867 & 0.1469 \end{bmatrix},$$

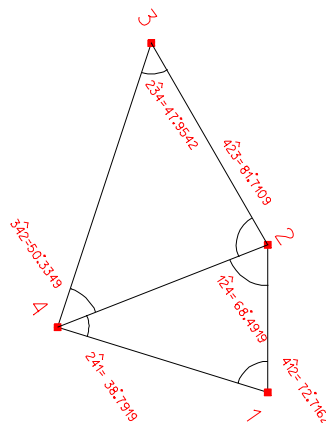
$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -0.0815 \\ 3.7172 \\ -6.2823 \\ 3.7979 \\ -6.2024 \\ -10.0007 \end{bmatrix}, Q_{\text{res}} = 1.0 \times 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.0016 & -0.0023 & -0.0023 & 0.0060 & 0.0060 & 0 \\ -0.0023 & 0.0115 & -0.0110 & -0.0087 & -0.0087 & 0 \\ -0.0023 & -0.0110 & 0.0290 & -0.0087 & -0.0087 & 0 \\ 0.0060 & -0.0087 & -0.0087 & 0.0478 & -0.0147 & 0 \\ 0.0060 & -0.0087 & -0.0087 & -0.0147 & 0.0753 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1225 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\ell}_{\text{ajus}} = \begin{bmatrix} -0.0803 \\ 3.7188 \\ -6.2806 \\ 3.7991 \\ -6.2003 \\ -9.9994 \end{bmatrix}, Q_{\text{obsajust}} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0837 & 0.0235 & 0.0235 & -0.0602 & -0.0602 & 0 \\ 0.0235 & 0.1102 & 0.1102 & 0.0867 & 0.0867 & 0 \\ 0.0235 & 0.1102 & 0.1102 & 0.0867 & 0.0867 & 0 \\ -0.0602 & 0.0867 & 0.0867 & 0.1469 & 0.1469 & 0 \\ -0.0602 & 0.0867 & 0.0867 & 0.1469 & 0.1469 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}^T \mathbf{v} = 1096.04 \text{ mm}^2, s_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{n - u + d} = \frac{1.86 \text{ mm}^2}{6 - 4 + 1} = 548.02 \text{ mm}^2, \text{tr}(Q_{\text{par}}) = 0.2571 \times 10^{-5}, \Sigma_{\text{par}} = s_0^2 Q_{\text{par}}.$$

Exemplo: considerando a rede 2D constituída pelos pontos 1, 2, 3, 4, foram realizadas as 6 observações de ângulos azimutais indicadas na figura (a precisão angular é igual a 3'', observações não correlacionadas). Ajuste a rede considerada.

$3\hat{4}2 = 50^\circ.3349$
$2\hat{4}1 = 38^\circ.7919$
$4\hat{1}2 = 72^\circ.7162$
$1\hat{2}4 = 68^\circ.4919$
$4\hat{2}3 = 81^\circ.7109$
$2\hat{3}4 = 47^\circ.9542$



As seis equações que relacionam as observações com os parâmetros são:

$$F_1 = R_{1,2}^0 - R_{1,4}^0 - 4\hat{1}2 + v_1 = a \tan \frac{X_2^0 - X_1^0}{Y_2^0 - Y_1^0} - a \tan \frac{X_4^0 - X_1^0}{Y_4^0 - Y_1^0} - 4\hat{1}2 + v_1 = 0$$

$$F_2 = R_{2,3}^0 - R_{2,4}^0 - 4\hat{2}3 + v_2 = a \tan \frac{X_3^0 - X_2^0}{Y_3^0 - Y_2^0} - a \tan \frac{X_4^0 - X_2^0}{Y_4^0 - Y_2^0} - 4\hat{2}3 + v_2 = 0$$

$$F_3 = R_{2,4}^0 - R_{2,1}^0 - 1\hat{2}4 + v_3 = a \tan \frac{X_4^0 - X_2^0}{Y_4^0 - Y_2^0} - a \tan \frac{X_1^0 - X_2^0}{Y_1^0 - Y_2^0} - 1\hat{2}4 + v_3 = 0$$

$$F_4 = R_{4,1}^0 - R_{4,2}^0 - 2\hat{4}1 + v_4 = a \tan \frac{X_1^0 - X_4^0}{Y_1^0 - Y_4^0} - a \tan \frac{X_2^0 - X_4^0}{Y_2^0 - Y_4^0} - 2\hat{4}1 + v_4 = 0$$

$$F_5 = R_{4,2}^0 - R_{4,3}^0 - 3\hat{4}2 + 2\pi + v_5 = a \tan \frac{X_2^0 - X_4^0}{Y_2^0 - Y_4^0} - a \tan \frac{X_3^0 - X_4^0}{Y_3^0 - Y_4^0} - 3\hat{4}2 + 2\pi + v_5 = 0$$

$$F_6 = R_{3,4}^0 - R_{3,2}^0 - 2\hat{3}4 + v_6 = a \tan \frac{X_4^0 - X_3^0}{Y_4^0 - Y_3^0} - a \tan \frac{X_2^0 - X_3^0}{Y_2^0 - Y_3^0} - 2\hat{3}4 + v_6 = 0$$

O modelo linearizado é representado por $\vec{v}^{6,1} + B^{6,8} \delta \vec{x}^{8,1} = \vec{f}^{6,1}$, podendo utilizar-se as equações de ângulo azimutal linearizado:

$$\left(\frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}^2} - \frac{Y_C^0 - Y_A^0}{h_{0AC}^2} \right) \delta X_A + \left(\frac{X_C^0 - X_A^0}{h_{0AC}^2} - \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}^2} \right) \delta Y_A - \left(\frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}^2} \right) \delta X_B + \left(\frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}^2} \right) \delta Y_B + \left(\frac{Y_C^0 - Y_A^0}{h_{0AC}^2} \right) \delta X_C - \left(\frac{X_C^0 - X_A^0}{h_{0AC}^2} \right) \delta Y_C = \theta - \theta_0 + v :$$

$$F_1 = \left(\frac{Y_4^0 - Y_1^0}{d_{4,1}^2} - \frac{Y_2^0 - Y_1^0}{d_{2,1}^2} \right) \delta X_1 + \left(\frac{X_2^0 - X_1^0}{d_{2,1}^2} - \frac{X_4^0 - X_1^0}{d_{4,1}^2} \right) \delta Y_1 - \frac{Y_4^0 - Y_1^0}{d_{4,1}^2} \delta X_4 + \frac{X_4^0 - X_1^0}{d_{4,1}^2} \delta Y_4 + \frac{Y_2^0 - Y_1^0}{d_{2,1}^2} \delta X_2 - \frac{M_2^0 - M_1^0}{d_{2,1}^2} \delta Y_2 = 4\hat{1}2 - 4\hat{1}2^0 + v_1$$

$$F_2 = \left(\frac{Y_4^0 - Y_2^0}{d_{4,2}^2} - \frac{Y_3^0 - Y_2^0}{d_{3,2}^2} \right) \delta X_2 + \left(\frac{X_3^0 - X_2^0}{d_{3,2}^2} - \frac{X_4^0 - X_2^0}{d_{4,2}^2} \right) \delta Y_2 - \frac{Y_4^0 - Y_2^0}{d_{4,2}^2} \delta X_4 + \frac{X_4^0 - X_2^0}{d_{4,2}^2} \delta Y_4 + \frac{Y_3^0 - Y_2^0}{d_{3,2}^2} \delta X_3 - \frac{M_3^0 - M_2^0}{d_{3,2}^2} \delta Y_3 = 4\hat{2}3 - 4\hat{2}3^0 + v_2$$

$$F_3 = \left(\frac{Y_1^0 - Y_2^0}{d_{1,2}^2} - \frac{Y_4^0 - Y_2^0}{d_{4,2}^2} \right) \delta X_2 + \left(\frac{X_4^0 - X_2^0}{d_{4,2}^2} - \frac{X_1^0 - X_2^0}{d_{1,2}^2} \right) \delta Y_2 - \frac{Y_1^0 - Y_2^0}{d_{1,2}^2} \delta X_1 + \frac{X_1^0 - X_2^0}{d_{1,2}^2} \delta Y_1 + \frac{Y_4^0 - Y_2^0}{d_{4,2}^2} \delta X_4 - \frac{M_4^0 - M_2^0}{d_{4,2}^2} \delta Y_4 = 1\hat{2}4 - 1\hat{2}4^0 + v_3$$

$$F_4 = \left(\frac{Y_2^0 - Y_4^0}{d_{2,4}^2} - \frac{Y_1^0 - Y_4^0}{d_{1,4}^2} \right) \delta X_4 + \left(\frac{X_1^0 - X_4^0}{d_{1,4}^2} - \frac{X_2^0 - X_4^0}{d_{2,4}^2} \right) \delta Y_4 - \frac{Y_2^0 - Y_4^0}{d_{2,4}^2} \delta X_2 + \frac{X_2^0 - X_4^0}{d_{2,4}^2} \delta Y_2 + \frac{Y_1^0 - Y_4^0}{d_{1,4}^2} \delta X_1 - \frac{M_1^0 - M_4^0}{d_{1,4}^2} \delta Y_1 = 2\hat{4}1 - 2\hat{4}1^0 + v_4$$

$$F_5 = \left(\frac{Y_3^0 - Y_4^0}{d_{3,4}^2} - \frac{Y_2^0 - Y_4^0}{d_{2,4}^2} \right) \delta X_4 + \left(\frac{X_2^0 - X_4^0}{d_{2,4}^2} - \frac{X_3^0 - X_4^0}{d_{3,4}^2} \right) \delta Y_4 - \frac{Y_3^0 - Y_4^0}{d_{3,4}^2} \delta X_3 + \frac{X_3^0 - X_4^0}{d_{3,4}^2} \delta Y_3 + \frac{Y_2^0 - Y_4^0}{d_{2,4}^2} \delta X_2 - \frac{M_2^0 - M_4^0}{d_{2,4}^2} \delta Y_2 = 3\hat{4}2 - 3\hat{4}2^0 + v_5$$

$$F_6 = \left(\frac{Y_2^0 - Y_3^0}{d_{2,3}^2} - \frac{Y_4^0 - Y_3^0}{d_{4,3}^2} \right) \delta X_3 + \left(\frac{X_4^0 - X_3^0}{d_{4,3}^2} - \frac{X_2^0 - X_3^0}{d_{2,3}^2} \right) \delta Y_3 - \frac{Y_2^0 - Y_3^0}{d_{2,3}^2} \delta X_2 + \frac{X_2^0 - X_3^0}{d_{2,3}^2} \delta Y_2 + \frac{Y_4^0 - Y_3^0}{d_{4,3}^2} \delta X_4 - \frac{X_4^0 - X_3^0}{d_{4,3}^2} \delta Y_4 = 2\hat{3}4 - 2\hat{3}4^0 + v_6$$

O *deficit* de característica desta rede é igual a quatro, pelo que é necessário fixar as coordenadas X e Y de dois dos pontos, correspondentes à posição, orientação e escala da figura considerada (ou, como alternativa, fixar as coordenadas X e Y de um ponto, uma distância entre dois pontos e um rumo entre dois pontos). Atribuindo valores arbitrários a (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) , de tal forma que $\delta X_1=0$, $\delta Y_1=0$, $\delta X_2=0$, $\delta Y_2=0$, calculam-se as restantes coordenadas dos pontos da rede utilizando as observações efectuadas, valores que vão ser utilizados como aproximação inicial no processo iterativo, juntamente com a matriz P dos pesos das observações (o referencial utilizado é definido de forma a que a origem coincida com o ponto P_1 e o eixo Y tenha a direcção dos pontos P_1 e P_2):

$X_1=500$ m	$Y_1=500$ m
$X_2=500$ m	$Y_2=715.496$ m
$X_3=330.814$ m	$Y_3=1010.945$ m
$X_4=194.430$ m	$Y_4=595.079$ m

iteracao = 1

$$dX = \begin{bmatrix} 0.00066002 & 855892 \\ -0.00126475 & 754260 \\ 0.00115463 & 753269 \\ 0.00032627 & 415256 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = 3.308146600285589e+002$$

$$Y_3 = 1.010943735242458e+003$$

$$X_4 = 1.944311546375327e+002$$

$$Y_4 = 5.950793262741526e+002$$

iteracao = 2

$$dX = 1.0e-008 * \begin{bmatrix} -0.21238315 & 485793 \\ 0.41788393 & 607236 \\ -0.37179050 & 972188 \\ -0.09971870 & 377516 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = 3.308146600285589e+002$$

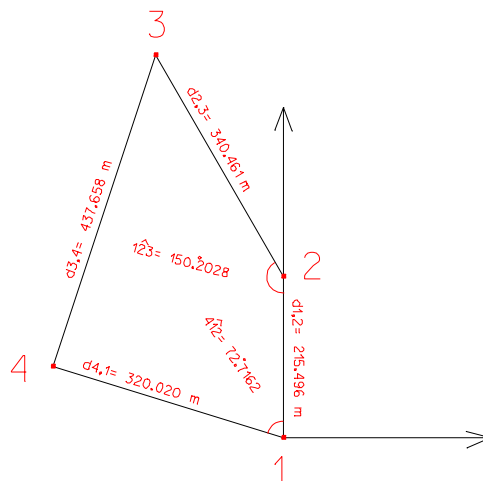
$$Y_3 = 1.010943735242458e+003$$

$$X_4 = 1.944311546375327e+002$$

$$Y_4 = 5.950793262741526e+002$$

Exemplo: considerando a rede 2D da figura, foram realizadas as observações de ângulos azimutais e distâncias horizontais indicadas na tabela 4.11. (a precisão linear é igual a 0.002 m e a precisão angular é igual a 3'', observações não correlacionadas). Ajuste a rede considerada.

$d_{1,2}=215.496 \text{ m}$
$d_{2,3}=340.461 \text{ m}$
$d_{3,4}=437.658 \text{ m}$
$d_{4,1}=320.020 \text{ m}$
$\hat{1}23=150.2028$
$4\hat{1}2=72.7162$



As seis equações que relacionam as observações com os parâmetros são:

$$F_1 = \sqrt{(X_1^0 - X_2^0)^2 + (Y_1^0 - Y_2^0)^2} - d_{1,2} + v_1 = 0$$

$$F_2 = \sqrt{(X_2^0 - X_3^0)^2 + (Y_2^0 - Y_3^0)^2} - d_{2,3} + v_2 = 0$$

$$F_3 = \sqrt{(X_3^0 - X_4^0)^2 + (Y_3^0 - Y_4^0)^2} - d_{3,4} + v_3 = 0$$

$$F_4 = \sqrt{(X_4^0 - X_1^0)^2 + (Y_4^0 - Y_1^0)^2} - d_{4,1} + v_4 = 0$$

$$F_5 = R_{1,2}^0 - R_{1,4}^0 - 4\hat{1}2 + v_5 = a \tan \frac{X_2^0 - X_1^0}{Y_2^0 - Y_1^0} - a \tan \frac{X_4^0 - X_1^0}{Y_4^0 - Y_1^0} - 4\hat{1}2 + v_5 = 0$$

$$F_6 = R_{2,3}^0 - R_{2,1}^0 - \hat{1}23 + v_6 = a \tan \frac{X_3^0 - X_2^0}{Y_3^0 - Y_2^0} - a \tan \frac{X_1^0 - X_2^0}{Y_1^0 - Y_2^0} - \hat{1}23 + v_6 = 0$$

O modelo linearizado é representado por $\vec{v}^{6,1} + B^{6,8} \delta \vec{x}^{8,1} - \vec{f}^{6,1} = 0$, podendo utilizar-se as equações de distância (horizontal) e de ângulo azimutal linearizadas previamente apresentadas:

$$\frac{X_A^0 - X_B^0}{s_0} \delta X_A + \frac{Y_A^0 - Y_B^0}{s_0} \delta Y_A + \frac{X_B^0 - X_A^0}{s_0} \delta X_B + \frac{Y_B^0 - Y_A^0}{s_0} \delta Y_B = s - s_0 + v$$

$$\left(\frac{Y_B^0 - Y_A^0}{h_{0AB}^2} - \frac{Y_C^0 - Y_A^0}{h_{0AC}^2} \right) \delta X_A + \left(\frac{X_C^0 - X_A^0}{h_{0AC}^2} - \frac{X_B^0 - X_A^0}{h_{0AB}^2} \right) \delta Y_A - \frac{(Y_B^0 - Y_A^0)}{h_{0AB}^2} \delta X_B + \frac{(X_B^0 - X_A^0)}{h_{0AB}^2} \delta Y_B + \frac{(Y_C^0 - Y_A^0)}{h_{0AC}^2} \delta X_C - \frac{(X_C^0 - X_A^0)}{h_{0AC}^2} \delta Y_C = \theta - \theta_0 + v$$

obtendo-se

$$F_1 = \frac{X_1^0 - X_2^0}{d_{1,2}^0} \delta X_1 + \frac{Y_1^0 - Y_2^0}{d_{1,2}^0} \delta Y_1 + \frac{X_2^0 - X_1^0}{d_{1,2}^0} \delta X_2 + \frac{Y_2^0 - Y_1^0}{d_{1,2}^0} \delta Y_2 = d_{1,2} - d_{1,2}^0 + v_1$$

$$F_2 = \frac{X_2^0 - X_3^0}{d_{2,3}^0} \delta X_2 + \frac{Y_2^0 - Y_3^0}{d_{2,3}^0} \delta Y_2 + \frac{X_3^0 - X_2^0}{d_{2,3}^0} \delta X_3 + \frac{Y_3^0 - Y_2^0}{d_{2,3}^0} \delta Y_3 = d_{2,3} - d_{2,3}^0 + v_2$$

$$F_3 = \frac{X_3^0 - X_4^0}{d_{3,4}^0} \delta X_3 + \frac{Y_3^0 - Y_4^0}{d_{3,4}^0} \delta Y_3 + \frac{X_4^0 - X_3^0}{d_{3,4}^0} \delta X_4 + \frac{Y_4^0 - Y_3^0}{d_{3,4}^0} \delta Y_4 = d_{3,4} - d_{3,4}^0 + v_3$$

$$F_4 = \frac{X_4^0 - X_1^0}{d_{4,1}^0} \delta X_4 + \frac{Y_4^0 - Y_1^0}{d_{4,1}^0} \delta Y_4 + \frac{X_1^0 - X_4^0}{d_{4,1}^0} \delta X_1 + \frac{Y_1^0 - Y_4^0}{d_{4,1}^0} \delta Y_1 = d_{4,1} - d_{4,1}^0 + v_4$$

$$F_5 = \left(\frac{Y_4^0 - Y_1^0}{d_{4,1}^{0\ 2}} - \frac{Y_2^0 - Y_1^0}{d_{2,1}^{0\ 2}} \right) \delta X_1 + \left(\frac{X_2^0 - X_1^0}{d_{2,1}^{0\ 2}} - \frac{X_4^0 - X_1^0}{d_{4,1}^{0\ 2}} \right) \delta Y_1 - \frac{Y_4^0 - Y_1^0}{d_{4,1}^{0\ 2}} \delta X_4 + \frac{X_4^0 - X_1^0}{d_{4,1}^{0\ 2}} \delta Y_4 + \frac{Y_2^0 - Y_1^0}{d_{2,1}^{0\ 2}} \delta X_2 - \frac{M_2^0 - M_1^0}{d_{2,1}^{0\ 2}} \delta Y_2 = 4\hat{1}2 - 4\hat{1}2^0 + v_5$$

$$F_6 = \left(\frac{Y_3^0 - Y_2^0}{d_{2,3}^{0\ 2}} - \frac{Y_1^0 - Y_2^0}{d_{2,1}^{0\ 2}} \right) \delta X_2 + \left(\frac{X_1^0 - X_2^0}{d_{2,1}^{0\ 2}} - \frac{X_3^0 - X_2^0}{d_{2,3}^{0\ 2}} \right) \delta Y_2 - \frac{Y_3^0 - Y_2^0}{d_{2,3}^{0\ 2}} \delta X_3 + \frac{X_3^0 - X_2^0}{d_{2,3}^{0\ 2}} \delta Y_3 + \frac{Y_1^0 - Y_2^0}{d_{2,1}^{0\ 2}} \delta X_1 - \frac{X_1^0 - X_2^0}{d_{2,1}^{0\ 2}} \delta Y_1 = 1\hat{2}3 - 1\hat{2}3^0 + v_6$$

Neste caso, como as observações de distância introduzem uma escala na rede, o *deficit* de característica é igual a três, pelo que é necessário fixar as coordenadas X e Y de um ponto e a coordenadas X ou Y de outro ponto (ou, como alternativa, fixar as coordenadas X e Y de um ponto e um rumo entre dois pontos). Fixar, como no caso anterior, as coordenadas X e Y de dois pontos traduz-se na introdução de um constrangimento, deixando a rede de ser de constrangimento mínimo, o que não se pretende. Atribuindo valores arbitrários a (X_1, Y_1) e X_2 , de tal forma que $\delta X_1=0$, $\delta Y_1=0$, $\delta X_2=0$, calculam-se as restantes coordenadas dos pontos da rede utilizando as observações efectuadas, valores que vão ser utilizados como aproximação inicial no processo iterativo, juntamente com a matriz P dos pesos das observações (o referencial utilizado é definido de forma a que a origem coincida com o ponto P_1 e o eixo Y tenha a direcção dos pontos P_1 e P_2):

P =

1.0e+009 *

0.0003	0	0	0	0	0
0	0.0003	0	0	0	0
0	0	0.0003	0	0	0
0	0	0	0.0003	0	0
0	0	0	0	4.7272	0
0	0	0	0	0	4.7272

iteracao = 1

$$dX1 = 1.0e-003 * \begin{bmatrix} 0.02830391 & 889760 \\ 0.29415132 & 941760 \\ -0.32465005 & 626872 \\ 0.50527015 & 773244 \\ 0.35938663 & 488790 \end{bmatrix}$$

$$Y_2 = 7.154960283039189e+002$$

$$X_3 = 3.308142941513294e+002$$

$$Y_3 = 1.010944675349944e+003$$

$$X_4 = 1.944305052701577e+002$$

$$Y_4 = 5.950793593866348e+002$$

(como nos dois casos anteriores parte-se de coordenadas aproximadas muito próximas das coordenadas ajustadas e o processo iterativo converge muito rapidamente).

12. Definição de um *datum* com constrangimentos

O modelo contendo equações de constrangimento entre os parâmetros tem a forma

$$\begin{cases} B^{n \times u} \vec{x}^{u \times 1} = \vec{e}^{n \times 1} + \vec{v}^{n \times 1} \\ C^{t \times d \times u} \vec{x}^{u \times 1} = \vec{g}^{d \times 1} = \text{constante} \end{cases}$$

conduzindo ao sistema de equações normais da forma

$$\begin{bmatrix} B^{T \times u \times n} P^{n \times n} B^{n \times u} & R^{u \times d} \\ C^{T \times d \times u} & 0^{d \times d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}^{u \times 1} \\ \vec{k}^{d \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{T \times u \times n} P^{n \times n} \vec{e}^{n \times 1} \\ \vec{g}^{d \times 1} \end{bmatrix}$$

em que $\vec{k}$ é o vector dos multiplicadores de Lagrange e $C^{u \times d}$ é a matriz que representa os constrangimentos. Como a matriz normal $N^{u \times u} = B^T P B$ é singular com *deficit* de característica $d = u - C(B)$, para que haja solução do sistema C^T tem que consistir em d constrangimentos linearmente independentes que não sejam combinações lineares das linhas de B (o *datum* é fixado através de C), o que algebricamente significa que o sistema das equações normais dado pela matriz $N = B^T P B$ deve ser tornado regular através de uma escolha conveniente de C , de forma a que a característica da

$$C \begin{bmatrix} B^T P B & R \\ R^T & 0 \end{bmatrix} = u + d.$$

A abordagem seguida no caso do *datum* com constrangimentos tem a vantagem de poder ser generalizada com facilidade, desde que os constrangimentos verifiquem a condição de que a solução seja única para o vector $\vec{x}$ dos parâmetros da equação

$$\begin{bmatrix} B^T P B & R \\ C^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^T P \vec{\ell} \\ \vec{g} \end{bmatrix},$$

obtendo-se então o sistema regular, em que $\vec{c} = \text{constante}$:

$$\begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^T P B & R \\ C^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B^T P \vec{\ell} \\ \vec{g} \end{bmatrix},$$

embora a inversão da matriz

$$\begin{bmatrix} B^T P B & R \\ C^T & 0 \end{bmatrix}$$

seja numericamente pouco eficiente, da forma:

$$\begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N + CC^T)^{-1} N (N + CC^T)^{-1} & (N + CC^T)^{-1} C \\ ((N + CC^T)^{-1} C)^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^T P \vec{\ell} \\ \vec{g} \end{bmatrix}$$

em que $N = B^T P B$, $C(N + CC^T) = C(A) + C(C) = u$, isto é, $N + CC^T$ é regular. Nessas condições, a solução é dada por:

$$\vec{x} = (N + CC^T)^{-1} N (N + CC^T)^{-1} B^T P \vec{\ell} + (N + CC^T)^{-1} R \vec{g}$$

$$\vec{k} = ((N + CC^T)^{-1} C)^T B^T P \vec{\ell} = \vec{0}$$

$$Q_{\vec{x}} = (N + CC^T)^{-1} N (N + CC^T)^{-1}$$

Ajustamento da rede 1D com datum com constrangimentos: mantendo o ponto P_4 como *datum*, o constrangimento $C^T \delta \vec{x} = \vec{g}$, com $\vec{g}^{1 \times 1} = 101.0000$ (pois a altitude de P_4 considera-se fixa) tem a forma

$$C^{4,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{\text{obs}} = 1.0 \times 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.0100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0225 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0400 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0900 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1225 \end{bmatrix} \text{m}^2,$$

$$Q_{\text{obs}} = 1.0 \times 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.0100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0225 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0400 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0900 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1225 \end{bmatrix} \text{m}^2$$

$$P_{\text{obs}} = 1.0 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4444 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1600 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1111 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.08166 \end{bmatrix}$$

sendo a estimativa do vector dos parâmetros dada por

$$\vec{x}^{4,1} = (N^{4,4} + C^{4,1}C^{1,4t})^{-1}N^{4,4}(N^{4,4} + CC^{1,4t})^{-1}B^{4,6t}P^{6,6}\vec{e}^{6,1} + (N^{4,4} + C^{4,1}C^{1,4T})^{-1}R^{4,1}\vec{g}^{1,1} = \begin{bmatrix} 100.9977 \\ 100.9987 \\ 100.9994 \\ 101.0000 \end{bmatrix},$$

obtendo-se a mesma estimativa que no caso da definição do *datum* de variância nula pois P_1 é em ambos os casos o único ponto do *datum*.

Tem-se ainda

$$Q_{\text{par}} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.2385 & 0.2133 & 0.2042 & 0.0000 \\ 0.2133 & 0.2719 & 0.2016 & 0.0000 \\ 0.2042 & 0.2016 & 0.3251 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

resultado idêntico ao do caso correspondente anterior. Para $\vec{v}$ e s_0^2 também se obtêm resultados idênticos aos da solução b) do *datum* de variância nula:

$$\vec{v} = 1.0 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.1798 \\ 0.0722 \\ 0.5910 \\ -0.5480 \\ -0.8292 \\ -0.6812 \end{bmatrix}, Q_{\text{res}} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0163 & -0.0225 & -0.0252 & 0.0612 & 0.0585 & -0.0026 \\ -0.0225 & 0.0699 & -0.0342 & -0.1326 & -0.0117 & 0.1208 \\ -0.0252 & -0.0342 & 0.1615 & -0.0091 & -0.2133 & -0.2042 \\ 0.0612 & -0.1326 & -0.0091 & 0.4312 & -0.0703 & 0.1235 \\ 0.0585 & -0.0117 & -0.2133 & -0.0703 & 0.6281 & -0.2016 \\ -0.0026 & 0.1208 & -0.2042 & 0.1235 & -0.2016 & 0.8999 \end{bmatrix},$$

$$\vec{\ell}_{\text{ajus}} = \begin{bmatrix} 0.0010 \\ 0.0017 \\ 0.0023 \\ 0.0007 \\ 0.0013 \\ 0.0006 \end{bmatrix}, Q_{\text{obsajust}} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0837 & 0.0225 & 0.0252 & -0.0612 & -0.0585 & 0.0026 \\ 0.0225 & 0.1551 & 0.0342 & 0.1326 & 0.0117 & -0.1208 \\ 0.0252 & 0.0342 & 0.2385 & 0.0091 & 0.2133 & 0.2042 \\ -0.0612 & 0.1326 & 0.0091 & 0.1938 & 0.0703 & -0.1235 \\ -0.0585 & 0.0117 & 0.2133 & 0.0703 & 0.2719 & 0.2016 \\ 0.0026 & -0.1208 & 0.2042 & -0.1235 & 0.2016 & 0.3251 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{v}^T \vec{v} = 1.84 \text{ mm}^2, s_0^2 = \frac{\vec{v}^T \vec{v}}{n - u + d} = \frac{1.84 \text{ mm}^2}{6 - 4 + 1} = 0.61 \text{ mm}^2, \text{tr}(Q_{\text{par}}) = 0.8355 \times 10^{-5}, \Sigma_{\text{par}} = s_0^2 Q_{\text{par}}.$$

De forma idêntica, mantendo o ponto P_1 como *datum*, o constrangimento $R^T \delta \vec{x} = \vec{c}$, com $\vec{c}^{1 \times 1} = 100.9977$ (pois a cota de P_1 considera-se fixa) tem a forma

$$C^{4,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

sendo a estimativa do vector dos parâmetros dada por

$$\vec{x}^{4,1} = (N^{4,4} + C^{4,1} C^{1,4t})^{-1} N^{4,4} (N^{4,4} + C^{4,1} C^{1,4t})^{-1} B^{4,6T} P^{6,6} \vec{e}^{6,1} + (N^{4,4} + C^{4,1} C^{1,4t})^{-1} C^{4,1} \vec{g}^{1,1} = \begin{bmatrix} 100.9977 \\ 100.9987 \\ 100.9994 \\ 101.0000 \end{bmatrix},$$

obtendo-se a mesma estimativa que no caso anterior pois P_1 é em ambos os casos o único ponto do *datum*. Tem-se ainda

$$Q_{\text{par}} = 1.0 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0837 & 0.0225 & 0.0251 \\ 0.0000 & 0.0225 & 0.1551 & 0.0342 \\ 0.0000 & 0.0252 & 0.0342 & 0.2385 \end{bmatrix}.$$

Embora, como já foi dito, a definição de um *datum* através de constrangimentos se traduza na obtenção de matrizes de maiores dimensões relativamente ao caso da definição de um *datum* com variância nula, com eventuais dificuldades na inversão das matrizes, há neste primeiro caso uma maior versatilidade na fixação do *datum*, permitindo soluções que não se reduzem à fixação de coordenadas, como por exemplo manter a distância entre dois ou mais pontos da rede fixa, impor que a diferença de cota de dois ou mais pontos não varie, etc.

Constrangimento numa rede 2D por fixação de coordenadas de dois pontos:

Pode impor-se este tipo de constrangimento quando uma rede plana consiste apenas em observações de ângulos azimutais, de tal forma que o *deficit* de característica é igual a 4. Atribuindo coordenadas fixas a duas estações da rede, remove-se este *deficit* de característica: supondo que os pontos P e Q são escolhidos para constranger a posição, escala e rumo, as equações de constrangimento $R \bar{x} = \bar{c}$ são obtidas de

$$X_P = g_1, Y_P = g_2, X_Q = g_3, Y_Q = g_4,$$

onde g_1, g_2, g_3, g_4 representam constantes, de tal forma que

$$\delta X_P = 0, \delta Y_P = 0, \delta X_Q = 0, \delta Y_Q = 0,$$

ou, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X_1 \\ \delta Y_1 \\ \vdots \\ \delta X_P \\ \delta Y_P \\ \delta X_Q \\ \delta Y_Q \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Constrangimento numa rede 2D por fixação de uma distância horizontal PQ:

Este tipo de constrangimento pode impor-se em rede planas consistindo numa estação fixa, num rumo e ângulos azimutais observados, sendo neste caso o *deficit* de característica igual a 1, correspondente à escala. Supondo que o elemento da rede que vai ser utilizado para completar o *datum* é a linha PQ, a equação de constrangimento é

$$(X_Q - X_P)^2 + (Y_Q - Y_P)^2 = s^2,$$

onde s é o valor fixo que representa o comprimento do elemento PQ, tendo-se neste caso,

$$2(X_Q - X_P)\delta X_Q - 2(X_Q - X_P)\delta X_P + 2(Y_Q - Y_P)\delta Y_Q - 2(Y_Q - Y_P)\delta Y_P = 2s \, ds = 0$$

$$-(X_Q - X_P)\delta X_P - (Y_Q - Y_P)\delta Y_P + (X_Q - X_P)\delta X_Q + (Y_Q - Y_P)\delta Y_Q = 0$$

ou, na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -(X_Q - X_P) & -(Y_Q - Y_P) & (X_Q - X_P) & (Y_Q - Y_P) & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X_1 \\ \delta Y_1 \\ \vdots \\ \delta X_P \\ \delta Y_P \\ \delta X_Q \\ \delta Y_Q \\ \vdots \end{bmatrix} = 0$$

Constrangimento numa rede 2D por fixação de um rumo PQ:

Esta situação acontece numa rede plana consistindo numa estação fixa com observação de ângulos azimutais e distâncias, sendo o *deficit* de característica igual a 1, correspondente a uma rotação. Supondo que a linha PQ tem que ter azimute fixo α , a equação de constrangimento correspondente é

$$(X_Q - X_P)/(Y_Q - Y_P) = \tan \alpha,$$

obtendo-se então a equação

$$-\frac{(Y_Q - Y_P)}{(Y_Q - Y_P)^2} \delta X_P + \frac{(Y_Q - Y_P)}{(Y_Q - Y_P)^2} \delta X_Q + \frac{(X_Q - X_P)}{(Y_Q - Y_P)^2} \delta Y_P - \frac{(X_Q - X_P)}{(Y_Q - Y_P)^2} \delta Y_Q = \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha = 0$$

$$-(Y_Q - Y_P) \delta X_P + (X_Q - X_P) \delta Y_P + (Y_Q - Y_P) \delta X_Q - (X_Q - X_P) \delta Y_Q = \frac{(Y_Q - Y_P)^2}{\cos^2 \alpha} d\alpha = 0$$

$$-(Y_Q - Y_P) \delta X_P + (X_Q - X_P) \delta Y_P + (Y_Q - Y_P) \delta X_Q - (X_Q - X_P) \delta Y_Q = \frac{(\sin \alpha \cdot d_{PQ})^2}{\cos^2 \alpha} d\alpha = 0$$

$$-(Y_Q - Y_P) \delta X_P + (X_Q - X_P) \delta Y_P + (Y_Q - Y_P) \delta X_Q - (X_Q - X_P) \delta Y_Q = \tan^2 \alpha \cdot d_{PQ}^2 d\alpha = 0$$

$$-(Y_Q - Y_P) \delta X_P + (X_Q - X_P) \delta Y_P + (Y_Q - Y_P) \delta X_Q - (X_Q - X_P) \delta Y_Q = 0$$

ou, na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -(Y_Q - Y_P) & (X_Q - X_P) & (Y_Q - Y_P) & -(X_Q - X_P) & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X_1 \\ \delta Y_1 \\ \vdots \\ \delta X_P \\ \delta Y_P \\ \delta X_Q \\ \delta Y_Q \\ \vdots \end{bmatrix} = 0$$

Exemplo: ajustamento da rede 2D com *datum* com constrangimentos: mantendo o *datum* através dos parâmetros $X_1 = M_1$, $X_2 = P_1$, $X_3 = M_2$, tem-se que a matriz C dos constrangimentos é dada por:

C =

1	0	0
0	1	0
0	0	1
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0

mantendo-se as matrizes A e W idênticas:

A =

0	-1.0000	0	1.0000	0	0	0	0
0	0	0.4958	-0.8684	-0.4958	0.8684	0	0
0	0	0	0	0.3128	0.9498	-0.3128	-0.9498
0.9550	-0.2965	0	0	0	0	-0.9550	0.2965
-0.0037	0.0030	0.0047	0	0	0	-0.0009	-0.0030
0.0047	0	-0.0072	-0.0015	0.0025	0.0015	0	0

W =

0.4960
-0.3865
-0.3203
-0.3876
-0.0006
-0.0013

sendo o vector $\delta\vec{X}$ dos acréscimos aos parâmetros dado por $\delta\vec{X} = (N + CC^T)^{-1}N(N + CC^T)^{-1}B^TP\vec{\ell} + (N + CC^T)^{-1}C\vec{g}$, em que $\vec{\ell} = \vec{W}$ e $\vec{g} = 0$, obtendo-se convergência em duas iterações

dX =

-0.0000
0.0000
-0.0000
0.4961
-0.1860
-0.0551
0.4304
0.0793

dX =

1.0e-003 *

0.0000
-0.0000
-0.0000
-0.0649
0.3181
-0.2554
0.0999
0.0994

sendo a solução final dos parâmetros dada por

$$\begin{aligned}M_1 &= 500.000 \\P_1 &= 500.000 \\M_2 &= 500.000 \\P_2 &= 715.496 \\M_3 &= 330.814 \\P_3 &= 1010.945 \\M_4 &= 194.431 \\P_4 &= 595.079\end{aligned}$$

igual à solução obtida com *datum* com variância zero. A matriz cofactor neste caso é:

$$Q = 1.0\text{e-}004 \cdot \begin{bmatrix} 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0368 & -0.0123 & 0.0271 & 0.0055 & 0.0176 \\ 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0123 & 0.1476 & 0.0392 & 0.0211 & 0.0671 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0271 & 0.0392 & 0.0790 & 0.0221 & 0.0703 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0055 & 0.0211 & 0.0221 & 0.0461 & 0.0200 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0176 & 0.0671 & 0.0703 & 0.0200 & 0.1053 \end{bmatrix}$$

Particularizando o resultado anterior do *datum* com constrangimentos para o caso do *datum* com variância nula, efectuando o rearranjo dos parâmetros de forma a que os últimos d elementos de $\vec{x}$ se refiram aos pontos do *datum* escolhido e particionando B e C^T de acordo com este procedimento, tem-se:

$$B = [B_1 \quad B_2] \quad , \quad C^T = [0 \quad I_d] \quad , \quad N = B^T P B = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad \text{com } N_{ij} = B_i^T P B_j.$$

Em conformidade com

$$\begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^T P B & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B^T P \vec{\ell} \\ \vec{g} \end{bmatrix},$$

o sistema tem a forma

$$\begin{bmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \\ \vec{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & 0 \\ N_{21} & N_{22} & I_d \\ 0 & I_d & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1^T P \vec{\ell} \\ B_2^T P \vec{\ell} \\ \vec{g} \end{bmatrix}$$

cuja solução é dada por

$$\vec{x}_2 = \vec{0}$$

$$\vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{x}_1 = (B_1^T P B_1)^{-1} B_1^T P \vec{\ell} - (B_1^T P B_1)^{-1} B_1^T P B_2 \vec{g}$$

$$Q_{\vec{x}_1} = (B_1^T P B_1)^{-1}$$

$$Q_{\vec{x}_2} = 0$$

$$Q_{\vec{x}_1 \vec{x}_2} = 0$$

Esta solução para o problema clássico do *datum*, embora muito utilizada devido à facilidade da implementação numérica e à facilidade na interpretação dos resultados, tem a desvantagem de, como já tinha sido referido, o vector dos parâmetros $\vec{x}$ e da respectiva matriz cofactor $Q_{\vec{x}}$ dependerem inteiramente da escolha arbitrária do *datum*. Para além disso, a estimativa dos parâmetros $\vec{x}$ é enviesada, isto é,

$$E(\vec{x}) = (N + CC^T)^{-1} N (N + CC^T)^{-1} N \vec{x} + N (N + CC^T)^{-1} C \vec{g} \neq \vec{x}$$

$$Q_{\vec{x}} = (N + CC^T)^{-1} N (N + CC^T)^{-1},$$

que dependem obviamente da escolha dos constrangimentos.

14. Invariantes

Apesar do enviesamento da estimativa $\vec{x}$ dos parâmetros obtida atrás, existem funções de $\vec{x}$ que são invariantes relativamente aos constrangimentos C e que portanto são estimadores não enviesados; estas funções, do tipo $\vec{f} = B\vec{x}$, devem verificar certas condições, obtidas por substituição de $\vec{x} = (N + CC^t)^{-1} N (N + CC^t)^{-1} B^T P \vec{\ell} + (N + CC^t)^{-1} C \vec{g}$ na equação anterior, de forma a definir a estimativa $\vec{f}$ de $\vec{f} = H\vec{x}$, isto é,

$$\vec{f} = H\vec{x} = H(N + CC^t)^{-1} N (N + CC^t)^{-1} B^T P \vec{\ell} + B(N + CC^t)^{-1} C \vec{g},$$

com $E(\vec{f}) = HE(\vec{x}) = H(N + CC^t)^{-1} N (N + CC^t)^{-1} N \vec{x} + B(N + CC^t)^{-1} C \vec{g}$. Tem-se portanto que as duas condições que B deve verificar

para que $\vec{f}$ seja invariante são: $H(N + CC^t)^{-1} N (N + CC^t)^{-1} N = H$, $H(N + CC^t)^{-1} C = 0$.

Se se seleccionar H de tal forma que as suas linhas sejam combinações lineares das colunas de B , isto é, $H = GB$, então verificam-se as duas condições anteriores:

$$GBQ_{11}N = GB = H \quad \text{e} \quad GHQ_{12} = GHS(C^tS)^{-1} = 0$$

com $Q_{11}N = I_u - Q_{12}C$ e $BS=0$, sendo S uma matriz uxd de característica d .

Dois exemplos importantes de funções invariantes são os vectores das observações ajustadas e dos resíduos:

- $\vec{\ell} = \vec{\ell} + \vec{u} = B\vec{x} = BQ_{11}B^tP\vec{\ell}$

$$E(\vec{\ell}) = BQ_{11}B^tPE(\vec{\ell}) = BQ_{11}N\vec{x} = B\vec{x}$$

$$Q_{\vec{\ell}} = BQ_{11}NQ_{11}B^t = BQ_{11}B^t$$

- $\vec{u} = B\vec{x} - \vec{\ell} = (BQ_{11}B^tP - I) \vec{\ell}$

$$E(\vec{u}) = (BQ_{11}B^tP - I) E(\vec{\ell}) = (BQ_{11}N - B) \vec{x} = 0$$

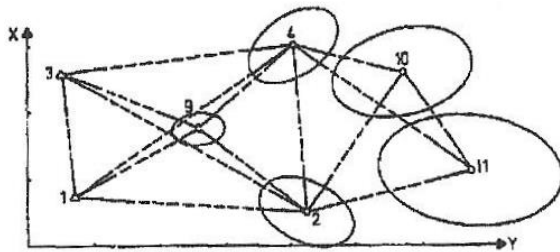
$$Q_{\vec{u}} = (BQ_{11}B^tP - I) Q (BQ_{11}B^tP - I)^t$$

sendo as respectivas matrizes cofactor independentes da selecção dos constrangimentos R . Uma vez que as observações ajustadas e os resíduos são independentes de R , então a forma quadrática $\vec{u}^T P \vec{u}$ e a estimativa da variância por unidade de peso *a posteriori* s_0^2 também são independentes de R , sendo por isso invariantes do modelo.

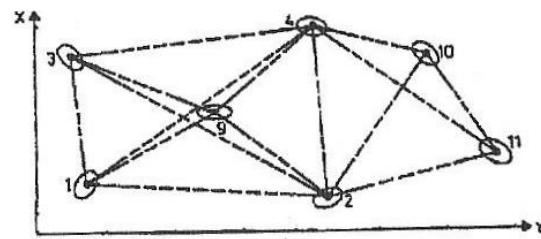
As posições relativas dos pontos de uma rede com constrangimento mínimo são portanto invariantes e formam uma estrutura rígida; quer isto dizer que seja qual for o *datum* escolhido numa rede livre, embora as coordenadas dos pontos da rede variem consoante o *datum*, as distâncias e os ângulos ajustados entre os pontos não variam. Em contraste com esta invariância nas observações ajustadas, repita-se, a matriz de variâncias-covariâncias das coordenadas dos pontos depende decisivamente do *datum* seleccionado.

14. Definição de um *datum* de norma mínima (traço mínimo)

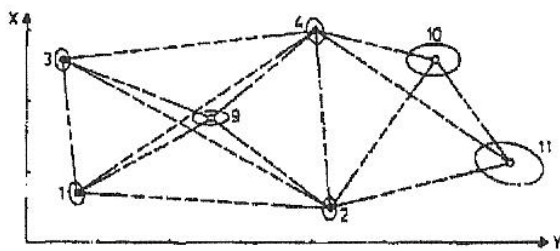
Nos dois casos anteriormente mencionados de estabelecimento de um *datum*, a estimativa por mínimos quadrados dos parâmetros não é, em geral, não enviesada nem de variância mínima, tendo-se, para além disto, que a solução obtida varia em função do *datum* seleccionado, pondo-se a questão se haverá algum critério para a selecção de alguma das soluções $\{\vec{x}\}$. Normalmente, nesses casos, o *datum* é definido arbitrariamente, com base em considerações geométricas, de forma a distribuir o melhor possível os resíduos pelas diversas estações da rede. Esta estratégia tem a vantagem de, mantendo o *datum* nos mesmos pontos ao longo do tempo, a comparação das coordenadas dos restantes pontos da rede em diferentes épocas ser imediata, desde que existam razões para supor que os pontos tomados para *datum* são efectivamente fixos. Num caso mais geral, para efectuar a comparação dos resultados entre épocas diferentes deve ser utilizado o método das transformações de similaridade para ultrapassar o problemas dos deslocamentos relacionados com os pontos do *datum*.



a)



b)



c)

Redes de constrangimento mínimo, onde se indicam as elipses de erro em cada ponto: a) *datum* nos pontos 1 e 3 (fixos); b) *datum* nos pontos 1, 2, 3, 4, 9, 10 e 11, através da minimização da totalidade do traço da matriz Q (constrangimentos internos); c) *datum* nos pontos 1, 2, 3 e 4, através da minimização parcial do traço da matriz Q (constrangimentos internos). O traço $\text{tr}(M)$ de uma matriz quadrada M é definido como a soma dos elementos da diagonal principal. Se M for uma matriz de variâncias-covariâncias, então $\text{tr}(M)$ é a soma das variâncias e pode ser interpretado como uma medida da precisão global do vector associado das variáveis aleatórias (parâmetros estimados).

Para uma rede com *deficit* de característica d , há múltiplas formas de impor constrangimentos que permitam a obtenção de uma solução, desde redes de constrangimento mínimo (redes livres) a redes constrangidas. Dentro do primeiro grupo pode considerar-se a solução particular designada por redes com constrangimentos internos em que os constrangimentos são aplicados ao centróide da rede, de tal forma que $///x_i^{\text{reduzido}} = x_i - \sum x_i/n$, n =número de pontos da rede; estes constrangimentos, definidos por $C^t \bar{x} = 0$, traduzem-se em redes onde todos (ou apenas alguns) pontos contribuem para o *datum*, isto é, as coordenadas de todos os pontos da rede variam ao longo do ajustamento (não há pontos fixos). São necessariamente redes locais, com coordenadas arbitrárias, ao contrário, por exemplo, de redes de adensamento, onde as coordenadas dos novos pontos têm que se ajustar aos pontos da rede de ordem superior (rede constrangida). Neste sentido, as redes livres são independentes dos erros das coordenadas dos pontos tomados como *datum*. Esta propriedade é importante quando se utilizam observações GPS na densificação de redes convencionais, cuja precisão é inferior. Há, no entanto, uma dificuldade em relacionar as coordenadas obtidas em épocas diferentes pois, variando o centróide da rede, o *datum* também varia ao longo do tempo. Partindo da solução geral no caso do *datum* com constrangimentos R ,

$$\bar{x} = (N + CC^t)^{-1}N(N + CC^t)^{-1}B^tP\bar{e} + (N + CC^t)^{-1}C\bar{g}, \quad Q_{\bar{x}} = (N + CC^t)^{-1}N(N + CC^t)^{-1},$$

pretende-se investigar se existe algum vector de $\{\bar{x}\}$ com traço mínimo da matriz cofactor associada, isto é, estabelece-se o critério

$$\text{tr}(Q_{\bar{x}}) = \text{tr}((N + CC^t)^{-1}N(N + CC^t)^{-1}) = \min, \text{ onde } N = B^tPB \text{ e } \bar{x} \text{ é um elemento de } \{\bar{x}\}.$$

Um método algébrico apropriado de obtenção de uma matriz S que conduza a $\text{tr}(Q_{\bar{x}}) = \min$ baseia-se nos valores próprios da matriz normal uxu $N = B^tPB$ (qualquer matriz de característica igual a d que verifique a condição $BS=0$ é uma escolha possível), dados por $(N - \lambda_i I) s_i = 0$, onde λ_i representa os valores próprios de N e s_i os vectores próprios associados a λ_i .

Uma matriz quadrada M com característica $C(M)$ possui $C(M)$ valores próprios não nulos e $C(M)$ vectores próprios linearmente independentes; se essa matriz M tem *deficit* de característica d , os respectivos vectores próprios formam uma matriz S_{uxd} que constitui um conjunto de constrangimentos para o *datum* de traço mínimo.

15. Constrangimentos internos

Utiliza-se esta designação para descrever um conjunto de constrangimentos mínimos cujas equações traduzem relações funcionais entre incrementos de primeira ordem para as coordenadas das estações da rede; considere-se, para exemplificar este tipo de constrangimentos, uma rede plana consistindo apenas em observações de ângulos azimutais, de forma a que as respectivas posição, escala e orientação permanecem indefinidas, sendo o *deficit* de característica da matriz normal igual a 4.

Atribuindo a um dado ponto P da rede coordenadas (M_i, P_i) como valores iniciais para o processo iterativo de ajustamento por mínimos quadrados, então as correcções da translação $(\delta M_0, \delta P_0)$, da rotação $\delta\alpha$ e da escala $(1+\delta\lambda)$ traduzem-se em novas coordenadas para o ponto P considerado:

$$\begin{bmatrix} M_i + \delta M_i \\ P_i + \delta P_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta M_0 \\ \delta P_0 \end{bmatrix} + (1 + \delta\lambda) \begin{bmatrix} 1 & \delta\alpha \\ -\delta\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_i \\ P_i \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \delta M_i \\ \delta P_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & P_i & M_i \\ 0 & 1 & -M_i & P_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta M_0 \\ \delta P_0 \\ \delta\alpha \\ \delta\lambda \end{bmatrix}.$$

Os constrangimentos internos de posição, rotação e escala são aplicados ao centróide de todas (ou a uma parte) as estações, a partir das respectivas coordenadas aproximadas. Se (M_G, P_G) forem as coordenadas do centróide dos n pontos da rede, tem-se

$$M_G = \sum_{i=1}^n M_i, \quad P_G = \sum_{i=1}^n P_i,$$

de tal forma que a equação de constrangimento posicional (translação) é dada por $\delta M_G = 0$, $\delta P_G = 0$ ou, de forma equivalente,

$$\sum_{i=1}^n \delta M_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \delta P_i = 0.$$

A equação de constrangimento rotacional é obtida a partir da imposição de que o rumo médio do centróide para cada ponto da rede permanece invariável: sendo θ_{Gi} o rumo do centróide para o ponto P, tem-se então que

$$\tan \theta_{Gi} = (M_i - M_G) / (P_i - P_G),$$

o que, após diferenciação, dá origem à expressão

$$\delta\theta_{Gi} = \left[(P_i - P_G)(\delta M_i - \delta M_G) - (M_i - M_G)(\delta P_i - \delta P_G) \right] / d_{Gi}^2,$$

onde d_{Gi} é a distância do centróide a P. Para que o rumo médio (a média dos rumos) permaneça constante, tem-se

$$\sum_{i=1}^n \delta \theta_{Gi} = 0, \text{ isto é, } \sum_{i=1}^n [(P_i - P_G)(\delta M_i - \delta M_G) - (M_i - M_G)(\delta P_i - \delta P_G)] = 0,$$

que se pode simplificar na forma

$$\sum_{i=1}^n (P_i \delta M_i - M_i \delta P_i) = 0.$$

A equação de constrangimento de escala é obtida através da imposição de que a distância média do centróide para cada ponto de rede permaneça constante, isto é,

$$d_{Gi}^2 = (M_i - M_G)^2 + (P_i - P_G)^2,$$

que após diferenciação conduz a

$$\delta d_{Gi} = [(M_i - M_G)(\delta M_i - \delta M_G) + (P_i - P_G)(\delta P_i - \delta P_G)] / d_{Gi} = 0;$$

para que a distância média permaneça constante, tem-se

$$\sum_{i=1}^n \delta d_{Gi} = 0, \text{ ou seja, } \sum_{i=1}^n (M_i - M_G)(\delta M_i - \delta M_G) + (P_i - P_G)(\delta P_i - \delta P_G) = 0,$$

que se pode simplificar na forma

$$\sum_{i=1}^n (M_i \delta M_i + P_i \delta P_i) = 0.$$

Sendo o vector solução $\vec{x} = [\delta M_1 \quad \delta P_1 \quad \delta M_2 \quad \delta P_2 \quad \dots \quad \delta M_n \quad \delta P_n]^T$, então a equação matricial dos constrangimentos internos é dada por

$$B\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ P_1 & -M_1 & P_2 & -M_2 & \dots & P_n & -M_n \\ M_1 & P_1 & M_2 & P_2 & \dots & M_n & P_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta M_1 \\ \delta P_1 \\ \delta M_2 \\ \delta P_2 \\ \dots \\ \delta M_n \\ \delta P_n \end{bmatrix}$$

ou, na extensão para três dimensões:

$$B\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & C_1 & -P_1 & 0 & C_2 & -P_2 & \dots & 0 & C_n & -P_n \\ -C_1 & 0 & M_1 & -C_2 & 0 & M_2 & \dots & -C_n & 0 & M_n \\ P_1 & -M_1 & 0 & P_2 & -M_2 & 0 & \dots & P_n & -M_n & 0 \\ M_1 & P_1 & C_1 & M_2 & P_2 & C_2 & \dots & M_n & P_n & C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta M_1 \\ \delta P_1 \\ \delta C_1 \\ \delta M_2 \\ \delta P_2 \\ \delta C_2 \\ \dots \\ \delta M_n \\ \delta P_n \\ \delta C_n \end{bmatrix}$$

A atribuição de valores iniciais (M_i^0, P_i^0, C_i^0) a cada ponto da rede no início do processo iterativo é suficiente para a definição do *datum*, obtidos fixando quaisquer dois pontos, numa solução inicial de variância nula: as três primeiras linhas de B fornecem o constrangimento posicional, as três linhas seguintes fornecem o constrangimento rotacional e a sétima linha o constrangimento de escala. Se as observações efectuadas incluírem distâncias, a sétima linha de B não é necessária; de forma idêntica, outras linhas de B podem ser omitidas se forem incluídas outros tipos de observações, como por exemplo diferenças de cota.

Em cada época considerada o *datum* definido será diferente, não sendo possível comparar directamente os vectores deslocamento e respectivas matrizes cofactor, sendo necessário reduzir as várias épocas a um *datum* comum. É possível efectuar uma mudança de *datum* aplicando uma transformação que mantenha a geometria da rede. Para que isso aconteça, o número de parâmetros dessa transformação não pode exceder o *deficit* de característica correspondente ao *datum* e deve ser uma transformação de similaridade (subconjunto das transformações afins que englobam as rotações, translações e aplicação de um factor de escala uniforme). Uma transformação de similaridade é também chamada de transformação conforme ou isogónica. O modelo expressa a relação entre dois sistemas de coordenadas por meio de três translações (x_o, y_o, z_o) , três rotações (e_x, e_y, e_z) e um fator de escala (k) . As três translações são justificadas pela não coincidência da origem dos dois sistemas; as três rotações são necessárias para expressar o não paralelismo entre os dois sistemas de eixos e um fator de escala é requerido para uniformizar (homogeneizar) a métrica dos dois sistemas. Assim, é necessário que se tenha pontos comuns nos dois sistemas para aplicar a transformação, sendo um mínimo de três pontos requeridos para a obtenção dos sete parâmetros.

Quando na equação normal ampliada a matriz D for definida a partir dos elementos que traduzem constrangimentos internos, a respectiva matriz inversa

$$\begin{bmatrix} B^T Q_\ell^{-1} B & D^T \\ D & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{12}^T & 0^T \end{bmatrix}$$

é regular e é tal que a matriz cofactor singular N_{11} correspondente à estimação por mínimos quadrados do valor das coordenadas tem traço mínimo comparando com todas as matrizes cofactor obtidas da aplicação de constrangimentos de outros tipos na mesma rede. A solução $\hat{\vec{x}}$ obtida desta forma tem ainda norma mínimo, ou seja, $\vec{x}^T \vec{x}$ é mínimo.

Pode mostrar-se que a matriz cofactor N_{11} é igual à pseudo-inversa de Moore-Penrose de $B^T Q_\ell^{-1} B$, caso particular da inversa generalizada M^- que satisfaz $M M^- M = M$ e $M^- M M^- = M^-$, podendo M ser não quadrada.; designando a pseudo-inversa de Moore-Penrose da matriz M por M^+ , então a solução por mínimos quadrados de traço mínimo e de norma mínima das equações de observação $B\vec{x} = A + \vec{v}$, cuja matriz cofactor é Q_ℓ^{-1} pode obter-se de

$$\begin{bmatrix} \hat{\bar{x}} \\ \hat{\bar{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^T Q_\ell^{-1} B & D^T \\ D & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B^T Q_\ell^{-1} D \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou de

$$\hat{\bar{x}} = (B^T Q_\ell^{-1} B)^+ B^T Q_\ell^{-1} D.$$

A primeira hipótese fornece um algoritmo de cálculo mais eficiente pois as inversas de Moore-Penrose são difíceis de calcular no caso de existirem observações de tipos diferentes, como por exemplo distâncias inclinadas e diferenças de cotas.

Exemplo: ajustamento da rede 1D com *datum* com traço mínimo (norma mínima), contribuindo todos os pontos para o *datum*, considerado no centróide da rede. Tendo a matriz

$$N_{4,4} = B_{4,6}^T P_{6,6} B_{6,4} = 1.0 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1.6944 & -1.0000 & -0.4444 & -0.2500 \\ -1.0000 & 1.2711 & -0.1600 & -0.1111 \\ -0.4444 & -0.1600 & 0.6861 & -0.0816 \\ -0.2500 & -0.1111 & -0.0816 & 0.4427 \end{bmatrix}$$

deficit de característica $d=1$, significa que um dos seus valores próprios é igual a zero; da definição de valores (λ) e vectores ($\vec{v}$) próprios de uma matriz: $N \vec{v} = \lambda \vec{v}$, os valores próprios são a solução da equação $\det(N - \lambda I) = 0$, isto é:

$$\lambda = 10^6 (0.0000, 0.5694, 0.9796, 2.5454),$$

sendo os vectores próprios associados (convenientemente normalizados):

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -0.5000 & -0.1870 & -0.3048 & 0.7887 \\ -0.5000 & -0.2306 & -0.5834 & -0.5971 \\ -0.5000 & -0.4333 & 0.7377 & -0.1347 \\ -0.5000 & 0.8509 & 0.1505 & -0.0570 \end{bmatrix}.$$

Pondo

$$\vec{S}^{4,1} = \begin{bmatrix} -0.5000 \\ -0.5000 \\ -0.5000 \\ -0.5000 \end{bmatrix}.$$

$$\text{tem-se } B^{6,4} \vec{S}^{4,1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5000 \\ -0.5000 \\ -0.5000 \\ -0.5000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

A estimativa do vector dos parâmetros, obtém-se de

$$\vec{x}_{4,1}^c = (N_{4,4} + S_{4,1}S_{1,4}^t)^{-1}N_{4,4}(N_{4,4} + S_{4,1}S_{1,4}^t)^{-1}B_{4,6}^T P_{6,6} \vec{e}_{6,1}, \text{ com}$$

$$(N_{4,4} + S_{4,1}S_{1,4}^t)^{-1}N_{4,4}(N_{4,4} + S_{4,1}S_{1,4}^t)^{-1} =$$

$$= \left(10^6 \begin{bmatrix} 1.6944 & -1.0000 & -0.4444 & -0.2500 \\ -1.0000 & 1.2711 & -0.1600 & -0.1111 \\ -0.4444 & -0.1600 & 0.6861 & -0.0816 \\ -0.2500 & -0.1111 & -0.0816 & 0.4427 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \right)^{-1} 10^6 \begin{bmatrix} 1.6944 & -1.0000 & -0.4444 & -0.2500 \\ -1.0000 & 1.2711 & -0.1600 & -0.1111 \\ -0.4444 & -0.1600 & 0.6861 & -0.0816 \\ -0.2500 & -0.1111 & -0.0816 & 0.4427 \end{bmatrix}$$

$$\left(10^6 \begin{bmatrix} 1.6944 & -1.0000 & -0.4444 & -0.2500 \\ -1.0000 & 1.2711 & -0.1600 & -0.1111 \\ -0.4444 & -0.1600 & 0.6861 & -0.0816 \\ -0.2500 & -0.1111 & -0.0816 & 0.4427 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \right)^{-1} =$$

$$= 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0401 & 0.0072 & -0.0129 & -0.0344 \\ 0.0072 & 0.0581 & -0.0232 & -0.0421 \\ -0.0129 & -0.0232 & 0.0892 & -0.0531 \\ -0.0344 & -0.0421 & -0.0531 & 0.1296 \end{bmatrix}$$

donde

$$\vec{x}_{4,1}^c = (N_{4,4} + S_{4,1}^c S_{1,4}^{c\,t})^{-1}N_{4,4}(N_{4,4} + S_{4,1}^c S_{1,4}^{c\,t})^{-1}B_{4,6}^T P_{6,6} \vec{e}_{6,1} = \begin{bmatrix} -1.200 \text{ mm} \\ -0.200 \text{ mm} \\ 0.400 \text{ mm} \\ 1.000 \text{ mm} \end{bmatrix}.$$

Quanto à matriz cofactor dos parâmetros $\vec{x}^c$, tem-se

$$Q_{\vec{x}} = (N + CC^t)^{-1}N(N + CC^t)^{-1} = 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0401 & 0.0072 & -0.0129 & -0.0344 \\ 0.0072 & 0.0581 & -0.0232 & -0.0421 \\ -0.0129 & -0.0232 & 0.0892 & -0.0531 \\ -0.0344 & -0.0421 & -0.0531 & 0.1296 \end{bmatrix}$$

pelo que

$$\text{tr}(Q_{\vec{x}}) = 0.3170 \times 10^{-5}$$

Exemplo: ajustamento da rede 2D com *datum* de traço mínimo (norma mínima): tem-se, após a 2ª iteração:

A =

-0.0007	-1.0000	0.0007	1.0000	0	0	0	0
0	0	0.4963	-0.8681	-0.4963	0.8681	0	0
0	0	0	0	0.3123	0.9500	-0.3123	-0.9500
0.9546	-0.2978	0	0	0	0	-0.9546	0.2978
-0.0037	0.0030	0.0046	-0.0000	0	0	-0.0009	-0.0030
0.0046	-0.0000	-0.0072	-0.0015	0.0025	0.0015	0	0

N =

1.0e+005 *

3.9469	-1.2334	-2.3912	-0.3203	0.5594	0.3198	-2.1151	1.2338
-1.2334	3.1433	0.6544	-2.5002	-0.0004	-0.0002	0.5793	-0.6428
-2.3912	0.6544	4.0778	-0.5817	-1.4826	0.5817	-0.2041	-0.6544
-0.3203	-2.5002	-0.5817	4.4842	0.9019	-1.9844	0.0001	0.0005
0.5594	-0.0004	-1.4826	0.9019	1.1670	-0.1598	-0.2438	-0.7417
0.3198	-0.0002	0.5817	-1.9844	-0.1598	4.2408	-0.7417	-2.2562
-2.1151	0.5793	-0.2041	0.0001	-0.2438	-0.7417	2.5631	0.1622
1.2338	-0.6428	-0.6544	0.0005	-0.7417	-2.2562	0.1622	2.8985

Val =

1.0e+005 *

Columns 1 through 6

8.7813	0	0	0	0	0
0	6.8453	0	0	0	0
0	0	4.9966	0	0	0
0	0	0	3.7670	0	0
0	0	0	0	2.1314	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Columns 7 through 8

0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0.0000 + 0.0000i	0
0	0.0000 - 0.0000i

(os valores próprios da matriz N são os elementos da diagonal principal da matriz Val).

Vec =

Columns 1 through 6

-0.4149	0.5682	-0.1305	-0.1827	-0.0828
0.3929	0.0086	-0.4245	0.2946	-0.5126
0.4524	-0.2802	0.1841	-0.6313	-0.1841
-0.4592	-0.4242	0.5191	0.0446	-0.1471
-0.1555	0.0763	0.1264	0.4040	-0.3214
0.3631	0.5190	0.4252	0.0430	0.3928
0.1179	-0.3643	-0.1799	0.4100	0.5883
-0.2967	-0.1034	-0.5198	-0.3822	0.2669

(os vectores próprios da matriz N são as colunas da matriz Vec)

R =

-0.5205	-0.1426 + 0.0303i	-0.1426 - 0.0303i
-0.1710	-0.1236 - 0.3719i	-0.1236 + 0.3719i
-0.4736	0.1368 + 0.0175i	0.1368 - 0.0175i
-0.1710	-0.1238 - 0.3718i	-0.1238 + 0.3718i
-0.4094	0.5200	0.5200
-0.1343	0.0953 - 0.3819i	0.0953 + 0.3819i
-0.4997	-0.0190 + 0.0247i	-0.0190 - 0.0247i
-0.1046	0.2725 - 0.3900i	0.2725 + 0.3900i

dX =

1.0e-003 *

-0.1928
0.1692
0.1231
0.0504
0.0454
-0.1102
0.0242
-0.1095

 $M_1 = 499.794$ $P_1 = 499.786$ $M_2 = 499.946$ $P_2 = 715.282$ $M_3 = 330.969$ $P_3 = 1010.850$ $M_4 = 194.291$ $P_4 = 595.082$

Q =

1.0e-005 *

0.0823	-0.0011	-0.0117	-0.0235	0.0033	-0.0025	-0.0738	0.0272
-0.0011	0.2000	-0.0008	-0.0263	0.0913	-0.1103	-0.0893	-0.0633
-0.0117	-0.0008	0.1633	0.0181	-0.0464	-0.0280	-0.1052	0.0108
-0.0235	-0.0263	0.0181	0.1149	0.0435	-0.0336	-0.0380	-0.0550
0.0033	0.0913	-0.0464	0.0435	0.0986	-0.0445	-0.0554	-0.0903
-0.0025	-0.1103	-0.0280	-0.0336	-0.0445	0.1634	0.0750	-0.0195
-0.0738	-0.0893	-0.1052	-0.0380	-0.0554	0.0750	0.2344	0.0523
0.0272	-0.0633	0.0108	-0.0550	-0.0903	-0.0195	0.0523	0.1379

16. Transformação de *datum*

Uma mudança de *datum* consiste numa transformação afim (ou de afinidade), caso particular de uma transformação linear $\vec{y} = A\vec{x} + \vec{b}$, em que a matriz A é quadrada e não singular ($\det A \neq 0$). Há seis tipos elementares de transformações afins, podendo uma transformação afim geral ser factorizada numa sequência destas transformações elementares. Uma transformação afim corresponde a uma translação afectuada pelo vector $\vec{b}$ se $A = I$. As restantes cinco transformações são casos especiais da transformação homogénea $\vec{y} = B\vec{x}$; as rotações em torno da origem e as reflexões segundo cada um dos eixos não alteram o comprimento dos vectores posição de cada um dos vértices da figura a transformar, sendo neste caso a matriz B ortogonal (isto é, a

respectiva inversa coincide com a transposta); uma transformação de escala k deixa a direcção dos vectores posição de cada um dos vértices da figura a transformar inalterada, aplicando a mesma variação de escala a cada um dos eixos (a transformação inversa é obtida utilizando o factor $1/k$); uma elongação ou compressão segundo um determinado eixo altera a escala segundo essa direcção, mantendo as coordenadas dos vectores posição de cada um dos vértices da figura a transformar segundo os restantes eixos (a matriz B é diagonal sendo todos os elementos iguais a um com excepção do elemento correspondente à direcção da elongação, neste caso >1 , ou correspondente à direcção da compressão, neste caso <1 ; num cisalhamento são aplicados factores de escala diferentes a cada eixo.

Resumindo, as translações, rotações e reflexões preservam a forma e a dimensão mas podem alterar a orientação da figura original, sendo assim designadas por transformações de um corpo rígido; as translações, rotações, reflexões e escalamentos preservam a forma (isto é, preservam os ângulos), sendo designadas por transformações isogonais; todas as transformações afins transformam linhas paralelas em linhas paralelas. As matrizes seguintes são exemplo de transformações afins elementares:

$$\text{Rot}_{2,2} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} : \text{rotação de } 30^\circ \text{ em torno da origem do referencial no sentido retrógrado}$$

$$\text{RefY}_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} : \text{reflexão em relação ao eixo X}$$

$$\text{Esc}_{2,2} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} : \text{escalamento com factor de escala } \sqrt{3}$$

$$\text{ElonY}_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} : \text{elongamento segundo o eixo Y com factor de escala 2}$$

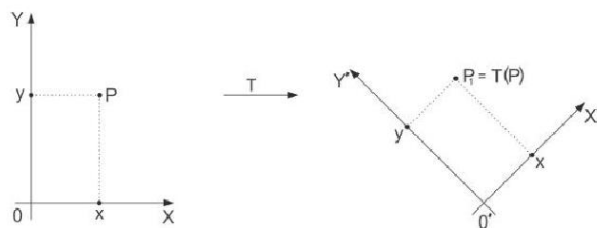
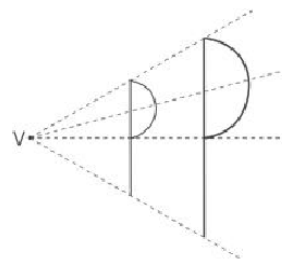
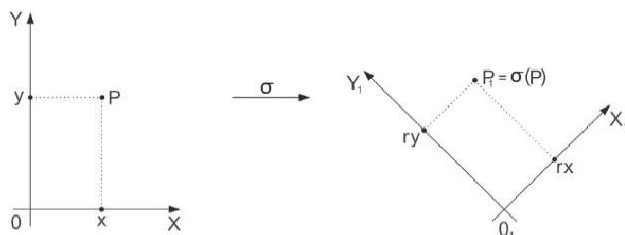
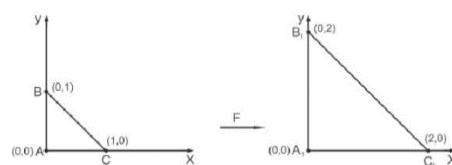
$$\text{CisX}_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \text{cisalhamento segundo o eixo X com factor de escala 3}$$

Como exemplos de transformações afins gerais tem-se:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3\sqrt{3} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} -3 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -2/\sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que corresponde a) a um escalamento com factor de escala 3, um cisalhamento segundo Y com factor de escala $-2/\sqrt{3}$, uma reflexão segundo Y e um cisalhamento segundo X com factor de escala $-2/\sqrt{3}$ e b) a um escalamento com factor de escala 3, um cisalhamento segundo Y com factor de escala $\sqrt{3}$, uma reflexão segundo X e uma compressão segundo Y com factor de escala $2/3$.

transformação de Helmert ou de similaridade, T_S homotetia, T_{TS} semelhança, T_{TC} isometria, T_C Representação gráfica das transformações afins compatíveis com uma mudança de *datum*

A expressão geral de uma transformação afim para o caso de uma rede bidimensional, é da forma $T_A(\lambda, \mu, H, \vec{t})$, onde λ, μ são os factores de escala em cada um dos eixos x e y , H é a matriz rotação de um ângulo θ em torno do eixo z e $\vec{t}$ é o vector translação, num total de cinco parâmetros (recorde-se que no caso bidimensional são necessários, no máximo, quatro parâmetros para fixar o *datum*, razão pela qual a transformação afim geral não é adequada). Um caso particular desta transformação afim é a transformação de similaridade ou transformação de Helmert, dada por $T_S(\lambda = \mu, H = \lambda R, \vec{t})$, com $C^t C = I$ (ou seja R é uma matriz ortogonal), que mantém os ângulos e a proporcionalidade de distâncias; outro caso particular é a transformação dada por $T_C(\lambda = \mu = 1, H = R, \vec{t})$, designada por isometria, transformação na qual as distâncias são igualmente conservadas; a transformação $T_{TS}(\lambda = \mu, H = \lambda I, \vec{t})$, designada por homotetia, mantém os rumos inalterados (ampliação ou redução da configuração original); finalmente, a transformação $T_{TC}(\lambda = \mu = 1, H = I, \vec{t})$, designada por semelhança, mantém as distâncias e os rumos invariantes. Resumindo:

	T_S	T_C	T_{TS}	T_{TC}
Distâncias	-	x	-	x
Razão de distâncias	x	x	x	x
Rumos	-	-	x	x
Ângulos	x	x	x	x

As distância relativamente a translações e rotações, os rumos relativamente a translações e escalamentos e os ângulos e razões de distâncias relativamente a translações, rotações e escalamentos permanecem invariantes

Para ser possível a estimação dos parâmetros no caso mais geral em que o sistema é singular, é necessário transformar o problema num sistema regular; as transformações apresentadas atrás possuem as características adequadas de forma a manter as observações invariantes e permitir a estimação não enviesada dos parâmetros.

Uma possibilidade de resolver o problema do ajustamento no caso da matriz A ser singular é através da factorização da matriz $A_{n \times u}$ na forma $A_{n \times u} = B_{n \times r} C_{r \times u}$, em que $C_{r \times u} = (A_{r \times n}^T A_{n \times r})^{-1} (A_{r \times n}^T B_{n \times u})$. O vector resultante $\vec{c}_{r \times 1} = C_{r \times u} \hat{x}_{u \times 1}$ contém as (restantes) estimativas não enviesadas dos parâmetros, de acordo com $\vec{\ell} + \vec{v} = A \vec{x} = B \vec{c}$. Esta solução apenas pode ser concretizada incluindo informação adicional, através do estabelecimento de um *datum*.

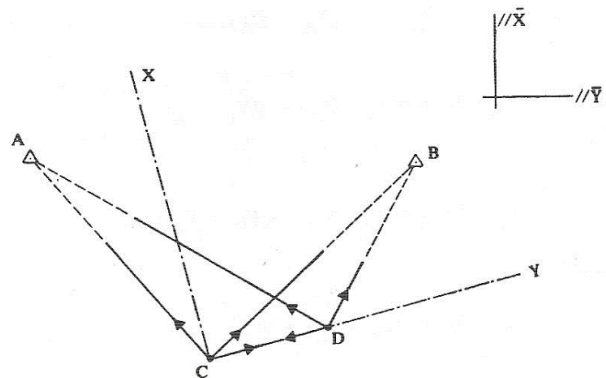
Uma forma completamente diferente de resolver o modelo $E(\vec{L}_{n \times 1}) = \vec{L}_{n \times 1}$ é através da utilização de inversas generalizadas, que verificam as seguintes características, sendo N^- a inversa generalizada da matriz N :

$$1) NN^-N = N \quad 2) N^-NN^- = N^- \quad 3) (NN^-)^T = NN^- \quad 4) (N^-N)^T = N^-N$$

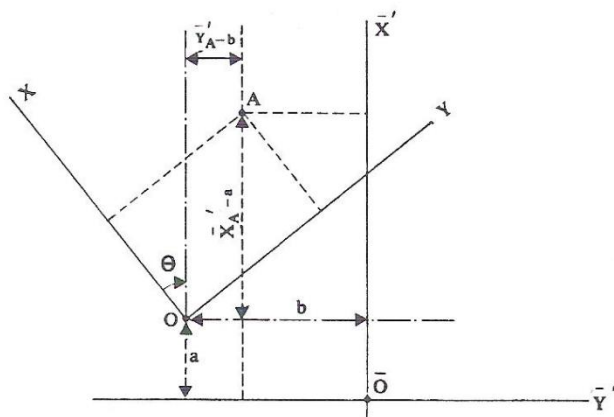
(uma inversa generalizada que verifique estas quatro condições é designada por inversa Moore-Penrose ou N^+). Para o sistema $\hat{x} = N^+ B^T \vec{\ell}$, a inversa generalizada N^+ (única) conduz à solução $\vec{v}^T \vec{v} = \text{mínimo}$, assim como à solução norma mínima $\hat{x}^T \hat{x} = \text{mínimo}$.

Diversos problemas de posicionamento podem ter uma solução conveniente através de uma transformação de coordenadas, sendo conhecidas as posições de um conjunto de pontos em ambos os referenciais. Um exemplo é o seguinte problema: pretendem-se as coordenadas do ponto C mas apenas os pontos A e B, de coordenadas conhecidas, podem ser observados de C; determina-se então um ponto auxiliar D, a curta distância de C, que também é observado de C. Estaciona-se em seguida no ponto D.

Problema dos dois pontos



A solução obtém-se da forma seguinte: adopta-se um referencial local com origem em C, com eixo das ordenadas segundo a direcção CD: neste referencial, as coordenadas de C são $X_c=0$, $Y_c=0$ e as de D são $X_D=0$, $Y_D=d$, sendo d a distância CD. A partir dos ângulos ACD e ADC e da distância d calculam-se as coordenadas de A no referencial local; a partir dos ângulos BDC e BCD e da distância d calculam-se as coordenadas de B no referencial local. Obtém-se desta forma as coordenadas de A e B no referencial global $(\bar{X}, \bar{Y})$ e no referencial local (X, Y) ; os dois referenciais podem relacionar-se através de uma transformação de similaridade que consiste numa translação de componentes (a, b) segundo $(\bar{X}, \bar{Y})$ que leva à coincidência das origens dos dois referenciais, numa rotação θ e num factor de escala λ :



Transformação de similaridade

$$\begin{bmatrix} \bar{X} - a \\ \bar{Y} - b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ -p & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

As quatro incógnitas a , b , p , q podem determinar-se se forem conhecidas, como é o caso, as coordenadas de dois pontos em ambos os referenciais:

$$\theta = R_{AB} - \bar{R}_{AB}$$

$$\lambda = \frac{\bar{d}_{AB}}{d_{AB}}$$

$$p = \lambda \cos \theta = \frac{(X_B - X_A)(\bar{X}_B - \bar{X}_A) + (Y_B - Y_A)(\bar{Y}_B - \bar{Y}_A)}{d_{AB}^2}$$

$$q = \lambda \sin \theta = \frac{(Y_B - Y_A)(\bar{X}_B - \bar{X}_A) + (X_B - X_A)(\bar{Y}_B - \bar{Y}_A)}{d_{AB}^2}$$

Tendo sido estabelecido um *datum* a partir de um conjunto de contrangimentos $C_1^T \vec{x} = 0$, pretende-se efectuar a transição para outro *datum* definido pelo conjunto de contrangimentos $C_2^T \vec{x} = 0$ através de uma transformação de similaridade S que evite a repetição da inversão da matriz normal de dimensão $u \times u$, à custa de d parâmetros convenientemente seleccionados que não deformem a configuração da rede.

Sendo $C_1 = B_1 S$ e $C_2 = B_2 S$, em que, por um lado, $AS = 0$ e $S^T S = I_d$ e, por outro, as matrizes B_1 e B_2 são matrizes diagonais cujos coeficientes são 0 ou 1 (com pelos menos d elementos não nulos), de tal forma que tornam nulas as linhas de S que correspondem aos 0 de B e mantêm as restantes linhas. Desta forma, consoante a forma da matriz B é obtido um constrangimento diferente, como por exemplo:

a) $B = I \Rightarrow R = S \Rightarrow \text{datum traço mínimo}$

b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_d \end{bmatrix} \Rightarrow \text{datum com variância zero}$

c) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, k > d \Rightarrow \text{datum com norma mínima}$

(esta última solução minimiza a norma parcial $\|\vec{x}_k\|$ consistindo nas k incógnitas indicadas pelo bloco I_k da matriz B anterior de tal forma que a soma das correspondentes k variâncias, isto é, o traço parcial da matriz cofactor, é mínima).

É possível definir uma transformação de datum numa rede a partir de uma escolha razoável da matriz B . A estimativa dos parâmetros $\vec{x}_1$ associada com os constrangimentos $C_1^T \vec{x} = 0$ possui matriz cofactor $Q_{\vec{x}_1} = (N + C_1 C_1^T)^{-1} N (N + C_1 C_1^T)^{-1}$; outros constrangimentos $C_2^T \vec{x} = 0$, que conduzem ao vector de parâmetros $\vec{x}_2$ e à correspondente matriz cofactor $Q_{\vec{x}_2} = (N + C_2 C_2^T)^{-1} N (N + C_2 C_2^T)^{-1}$, estando estas duas soluções relacionadas pela relação $\vec{x}_2 = K_1 \vec{x}_1$, $K_1 = (N + C_1 C_1^T)^{-1} N = I - S(C_1^T S)^{-1} C_1^T$, $Q_{\vec{x}_2} = K_1 Q_{\vec{x}_1} K_1^T$.

Ajustamento da rede 1D com datum por minimização da norma parcial: se os pontos P_2 e P_3 forem escolhidos como datum, então a matriz B é da forma

$$B = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & I_2 & & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

obtendo-se

$$C_d = B_d S = (0 \quad 1 \quad 1 \quad 0)^T$$

e o assim o constrangimento $C_d^T \vec{x} = 0$ conduz a $\hat{x}_2 + \hat{x}_3 = 0$.

De

$$N_{4,4} = A_{4,6}^T P_{6,6} A_{6,4} = 1.0 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1.6944 & -1.0000 & -0.4444 & -0.2500 \\ -1.0000 & 1.2711 & -0.1600 & -0.1111 \\ -0.4444 & -0.1600 & 0.6861 & -0.0816 \\ -0.2500 & -0.1111 & -0.0816 & 0.4427 \end{bmatrix}$$

tem-se então

$$Q_{\vec{x}} = (N + C_d C_d^T)^{-1} N (N + C_d C_d^T)^{-1} = 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0710 & 0.0178 & -0.0178 & 0.0413 \\ 0.0178 & 0.0484 & -0.0484 & 0.0133 \\ -0.0178 & -0.0484 & 0.0484 & -0.0133 \\ 0.0413 & 0.0133 & 0.0133 & 0.2500 \end{bmatrix}$$

$$\text{tr } Q_{\vec{x}} \text{ parcial} = 10^{-5} (0.0484 + 0.0484) = 0.0968 \times 10^{-5}$$

$$\begin{aligned}\bar{x}_{4,1}^d &= Q_{\bar{x}_{4,1}^d}^T A^T \bar{\ell} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.2 \text{ mm} \\ 1.6 \text{ mm} \\ 1.7 \text{ mm} \\ 1.2 \text{ mm} \\ 2.1 \text{ mm} \\ 1.3 \text{ mm} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -0.375 & -0.375 & -0.250 & 0 & 0.125 & 0.125 \\ 0.125 & -0.125 & 0 & -0.250 & -0.125 & 0.125 \\ -0.125 & 0.125 & 0 & 0.250 & 0.125 & -0.125 \\ -0.125 & -0.125 & 0.250 & 0 & 0.375 & 0.375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.2 \text{ mm} \\ 1.6 \text{ mm} \\ 1.7 \text{ mm} \\ 1.2 \text{ mm} \\ 2.1 \text{ mm} \\ 1.3 \text{ mm} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -1.05 \text{ mm} \\ -0.45 \text{ mm} \\ 0.45 \text{ mm} \\ 1.35 \text{ mm} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\|\bar{x}_{4,1}^d\| = \sqrt{\bar{\hat{x}}_{4,1}^{dT} \bar{\hat{x}}_{4,1}^d} = 1.82 \text{ mm}$$

$$\|\bar{x}_{2,1}^d\|_{\text{parcial}} = \sqrt{(-0.45)^2 + 0.45^2} = 0.64 \text{ mm}$$

O resultado é compatível com os constrangimentos; a comparação com as soluções a, b e c mostra que a definição do *datum* por minimização da norma parcial, isto é, a soma dos elementos da diagonal de $Q_{\bar{x}^d}$ que se referem a x_2 e a x_3 é menor que a restantes soluções, enquanto que o traço completo excede o valor correspondente à solução anterior.

Ajustamento da rede 1D com *datum* por transformação de *datum*: se os resultados para $\bar{x}$ e $Q_{\bar{x}}$ correspondentes a um *datum* forem conhecidos, então pode definir-se outro *datum* através de uma transformação; considere-se por exemplo a transformação da solução a para a solução c por intermédio de

$$\bar{x}^c = K_c \bar{x}^a$$

$$Q_{\bar{x}^c} = K_c^T Q_{\bar{x}^a} K_c$$

$$K_c = I - S (C_c^T S)^{-1} R_c^T$$

Os constrangimentos para o *datum* c são $C_c = C_c^T C_c^T = \frac{1}{2} (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$, sendo a matriz $S = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)^T$; assim,

$$C_c^T S = \frac{4}{2} = 2$$

$$(C_c^T S)^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$K_c = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$K_c \tilde{\hat{x}}^a = \begin{bmatrix} -1.125 \text{ mm} \\ -0.525 \text{ mm} \\ 0.375 \text{ mm} \\ 1.275 \text{ mm} \end{bmatrix}$$

Como se viu, a definição de um *datum* pode ser obtida através da introdução de constrangimentos que, para terem significado geométrico devem ser do tipo $R^T \bar{x} = 0$, com $R=BS$, sendo B seleccionada como se indicou no parágrafo anterior e S a matriz de transformação tal que $AS=NS=0$. No caso de uma rede 1D, é necessário estabelecer um constrangimento devido ao facto de o *deficit* de característica ser igual a 1, tendo a forma $S^T (1 \ 1 \ 1 \ 1) a$, onde a é uma constante qualquer; para a solução ser numericamente estável, a matriz S deve ser normalizada, isto é, a respectiva norma (comprimento de cada linha) deve ser igual a um. O método geral de normalização é $S_n^T = (S^T S)^{-1/2} S^T \Rightarrow S_n^T S_n = I$, existindo para quaisquer matrizes quadradas regulares; no caso especial de uma rede 1D, tem-se $S_n^T = \frac{1}{\sqrt{u}} (1 \ 1 \ 1 \ 1)$, onde u é o número de elementos não nulos de S .

No caso de um *datum* 2D com *deficit* de característica $d=4$ são necessários 4 constrangimentos; sendo os parâmetros a estimar representados por $\tilde{\hat{x}}^T = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_p, y_p)$, $\bar{x}_i$ e $\bar{y}_i$ as coordenadas aproximadas e $\tilde{x}_i$ e $\tilde{y}_i$ as correcções às coordenadas, então

$$S^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ \bar{y}_1 & -\bar{x}_1 & \bar{y}_2 & -\bar{x}_2 & \dots \\ \bar{x}_1 & \bar{y}_1 & \bar{x}_2 & \bar{y}_2 & \dots \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sum \tilde{x}_i = 0 \\ \sum \tilde{y}_i = 0 \\ \sum (\bar{y}_i \tilde{x}_i - \bar{x}_i \tilde{y}_i) = 0 \\ \sum (\bar{x}_i \tilde{x}_i + \bar{y}_i \tilde{y}_i) = 0 \end{cases}$$

Para efectuar a normalização de S , o sistema de coordenadas sofre uma translação de forma a que a respectiva origem coincida com o centro de gravidade de rede, ou seja, $\bar{x}_i = x_i^0 - \sum x_i^0 / p$, $\bar{y}_i = y_i^0 - \sum y_i^0 / p$, em que x_i^0 e y_i^0 representam as coordenadas no sistema original (neste procedimento as colunas S_j^T de S^T tornam-se ortogonais, isto é, $S_j^T S_k^T = 0$ para $j \neq k$, sendo então $S^T S$ uma matriz diagonal). Geometricamente, as duas primeiras colunas de S^T estão relacionadas com a translação em x e y ; a terceira coluna define a rotação em torno do eixo vertical e a quarta coluna ajusta a escala das observações em função das coordenadas aproximadas. Se algumas observações contiverem informação sobre o *datum*, então a(s) coluna(s) correspondente(s) de S^T é (são) omitida(s).

17. Medidas de precisão em redes geodésicas

Em muitos casos, a deformação a ser monitorizada por métodos geodésicos é de pequena amplitude, sendo geralmente da mesma ordem de magnitude dos erros de observação, pelo que a configuração de rede e a avaliação da precisão obtida têm um papel preponderante na análise dos resultados. Considerações de ordem prática impõem que os parâmetros do modelo de ajustamento das redes geodésicas sejam as coordenadas dos pontos, verificando-se que o vector $\bar{x}$ assim como a correspondente matriz $\Sigma_{\bar{x}}$ de variâncias-covariâncias não são quantidades invariantes deste modelo, dependendo da selecção do *datum*, o que torna difícil comparar a precisão das posições ajustadas.

Designam-se critérios globais aqueles que dependem da totalidade dos elementos da matriz cofactor dos parâmetros, como por exemplo a precisão, a fiabilidade e o elipsóide global de confiança. Estes critérios não fornecem qualquer indicação sobre pontos particulares da rede, razão pela qual se utilizam com mais frequência critérios locais como sejam as elipses de confiança, que indicam para cada ponto da rede um domínio de confiança para a localização desse ponto, podendo planejar-se a rede de forma a que todas ou algumas elipses não ultrapassem determinados limites. Uma rede diz-se homogénea se todas as elipses tiverem a mesma dimensão e diz-se homogénea e isotrópica quando para além de terem a mesma dimensão todas as elipses forem circulares (caso ideal), caso em que a precisão das coordenadas dos pontos é a mesma em todas as direcções.

A matriz $u \times u$ de variâncias-covariâncias contém informação relativa à precisão da rede, $\Sigma_{\bar{x}} = \sigma_0^2(N + CC^t)^{-1}N(N + CC^t)^{-1}$; numa rede com constrangimento mínimo, $\Sigma_{\bar{x}}$ tem *deficit* de característica d , isto é, $C(\Sigma_{\bar{x}}) = r = u - d$, o que quer dizer que existem d colunas redundantes nesta matriz, o que se traduz na não unicidade dos valores obtidos. Foram desenvolvidos diversos métodos para ultrapassar este problema, embora nenhum seja inteiramente satisfatório (a situação melhora quando se comparam duas matrizes de variâncias-covariâncias, existindo parâmetros relativos que são independentes do *datum*).

Um problema suplementar consiste na selecção do parâmetro σ_0^2 : no caso das variâncias das observações serem conhecidas e do modelo aplicado ser correcto, deve utilizar-se σ_0^2 . No entanto, com frequência a informação *a priori* sobre a precisão das observações é vaga e o modelo pode não ser a melhor aproximação da realidade: nesta situação é preferível utilizar-se s_0^2 , desde que o modelo tenha um número suficiente de graus de liberdade, ou seja, desde que $(n - r)/r > 0.5$.

Resumindo, há três factores que influenciam a precisão final dos parâmetros estimados:

- A selecção da instrumentação e da metodologia (número de repetições das observações) utilizadas.
- A geometria da rede, isto é, a posição relativa dos pontos da rede e a configuração das observações que ligam esses pontos, o que determina a forma da matriz A .
- A matriz P dos pesos, que contém o peso *a priori* das observações, que depende do tipo e da precisão relativa dessas observações.

Não é prático avaliar a precisão de uma rede através da análise dos elementos da matriz de variâncias-covariâncias pois o número de elementos desta matriz é normalmente elevado; esta informação deve portanto ser comprimida numa medida representativa que possa realçar a precisão da rede, embora haja uma perda de informação neste procedimento.

A abordagem fundamental para a análise da matriz de variâncias-covariâncias é a decomposição por valores próprios de $\Sigma_{\hat{x}}$. Sendo $\bar{x}$ o vector dos parâmetros de dimensão u , $\hat{x}$ a correspondente estimativa por mínimos quadrados e $\Sigma_{\hat{x}}$ a matriz de variâncias-covariâncias, a forma quadrática $(\bar{x} - \hat{x})^T \frac{1}{\sigma_0^2} N(\bar{x} - \hat{x})$ é a equação do hiper-elipsóide r -dimensional com centro em $\bar{x}$. Na hipótese de normalidade, $\hat{x} \sim N(\bar{x}, \Sigma_{\hat{x}})$ e sendo σ_0^2 conhecido, a forma quadrática anterior tem distribuição qui-quadrado com r graus de liberdade, isto é, $(\bar{x} - \hat{x})^T \frac{1}{\sigma_0^2} N(\bar{x} - \hat{x}) \sim \chi_{1-\alpha}^2(r)$. Após a selecção do nível de significância, por exemplo, $1 - \alpha = 95\%$, o correspondente valor $\chi_{1-\alpha}^2(r)$ pode ser calculado, ficando o hiper-elipsóide definido pelos seus r semi-eixos e respectivas direcções no espaço (os comprimentos destes eixos são proporcionais à raiz quadrada dos valores próprios de $\Sigma_{\hat{x}}$ e as respectivas direcções são dadas pelos vectores próprios). Partindo da equação $(\Sigma_{\hat{x}} - \lambda_i)s_i = 0$, $i \in \{1, 2, \dots, u\}$, onde λ_i é o i -gésimo valor próprio de $\Sigma_{\hat{x}}$ e s_i o vector próprio associado, como $\Sigma_{\hat{x}}$ é uma matriz definida semi-positiva, existem $C(\Sigma_{\hat{x}}) = r$ valores próprios positivos distintos e $d = u - r$ valores próprios nulos, com u vectores próprios distintos mutuamente ortogonais. A equação homogénea $(\Sigma_{\hat{x}} - \lambda_i)s_i = 0$ tem soluções não triviais se e só se $(\Sigma_{\hat{x}} - \lambda_i)$ for singular, ou seja, se o respectivo determinante for nulo, $\det(\Sigma_{\hat{x}} - \lambda_i) = 0$, ou,

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \lambda_i & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1u} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda_i & \cdots & \sigma_{2u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{u1} & \sigma_{u2} & \cdots & \sigma_{uu} - \lambda_i \end{bmatrix} = 0$$

cujo desenvolvimento conduz a um polinómio de ordem u em λ_i (polinómio característico), de cuja solução se obtêm os valores próprios e vectores próprios. Cada par $\lambda_i s_i$ define um eixo do hiper-elipsóide através do semi-eixo $a_i = \sqrt{c\lambda_i}$ e da direcção s_i .

Diversas medidas podem ser utilizadas para reflectir aspectos diferentes da precisão, medidas essas derivadas da expressão $\Sigma_{\hat{x}} = \sigma_0^2 Q_{\hat{x}} = \sigma_0^2 (N + CC^T)^{-1} N (N + CC^T)^{-1}$, em que

$$Q_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1i} & \cdots & Q_{1j} & \cdots & Q_{1p} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2i} & \cdots & Q_{2j} & \cdots & Q_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{i1} & Q_{i2} & \cdots & Q_{ii} & \cdots & Q_{ij} & \cdots & Q_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{j1} & Q_{j2} & \cdots & Q_{ji} & \cdots & Q_{jj} & \cdots & Q_{jp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{p1} & Q_{p2} & \cdots & Q_{pi} & \cdots & Q_{pj} & \cdots & Q_{pp} \end{bmatrix}$$

é apresentada em blocos (matrizes) de 2×2 , cada um relativo a um ponto ou a um par de pontos, em que

$$Q_{kk} = \begin{bmatrix} q_{xx}^k & q_{xy}^k \\ q_{yx}^k & q_{yy}^k \end{bmatrix} \text{ e } Q_{k\ell} = \begin{bmatrix} q_{xx}^{k\ell} & q_{xy}^{k\ell} \\ q_{yx}^{k\ell} & q_{yy}^{k\ell} \end{bmatrix}.$$

Uma medida imediata de precisão local é o desvio padrão das coordenadas; no caso de σ_0^2 conhecido, tem-se

$$\sigma_x = \sigma_0 \sqrt{q_{xx}}, \quad \sigma_y = \sigma_0 \sqrt{q_{yy}}$$

onde os cofactores q são os elementos pertinentes da matriz $\Sigma_{\hat{\vec{x}}}$. Quando σ_0^2 não é conhecido, tem-se:

$$s_x = s_0 \sqrt{q_{xx}}, \quad s_y = s_0 \sqrt{q_{yy}}$$

(estes valores são frequentemente designados por erros médios quadráticos das coordenadas). Como as expressões anteriores dependem da redundância do modelo, é aconselhável utilizar intervalos de confiança, para o que é necessário conhecer a distribuição de $(\vec{x} - \hat{\vec{x}})/s_{\vec{x}}$. Admitindo uma distribuição normal para $\vec{x}$, tem-se que $(\vec{x} - \hat{\vec{x}}) \sim N(0, \sigma_{\vec{x}})$, donde

$$P(-C_{\alpha/2} < (\vec{x} - \hat{\vec{x}})/\sigma_{\vec{x}} < C_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

ou

$$P(\hat{\vec{x}} - \sigma_{\vec{x}} C_{\alpha/2} < \vec{x} < \hat{\vec{x}} + \sigma_{\vec{x}} C_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

No caso de se conhecer s_0^2 , como $(\vec{x} - \hat{\vec{x}}) \sim t(n - r)$, tem-se

$$P(-t_{\alpha/2} < (\vec{x} - \hat{\vec{x}})/s_{\vec{x}} < t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

ou

$$P(\hat{\vec{x}} - s_{\vec{x}} t_{\alpha/2} < \vec{x} < \hat{\vec{x}} + s_{\vec{x}} t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

Uma forma prática de evidenciar a precisão de uma rede é utilizar elipses de erro ou de confiança, absolutas se se referirem a um ponto ou relativas se se referirem à diferença de posição entre dois pontos. Particularizando a expressão do hiper-elipsóide para a posição de um ponto P_k numa rede 2D, convenientemente multiplicada por σ_0^2 , tem-se

$$(\vec{x} - \hat{\vec{x}})^T Q_{kk} (\vec{x} - \hat{\vec{x}}) \sim \sigma_0^2 \chi_{1-\alpha}^2(2)$$

que é a equação de uma elipse cujos eixos são função dos valores e dos vectores próprios de Q_{kk} , pelo que resolvendo o sistema $(Q_{kk} - \lambda_i I) s_i = 0$ em relação a λ_i , isto é,

$$\det \begin{bmatrix} q_{xx}^k - \lambda & q_{xy}^k \\ q_{yx}^k & q_{yy}^k - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

ou

$$(q_{xx}^k - \lambda)(q_{yy}^k - \lambda) - q_{xy}^k q_{yx}^k = 0$$

cujas raízes são

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}(q_{xx}^k + q_{yy}^k + z) \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(q_{xx}^k + q_{yy}^k - z) \end{cases}$$

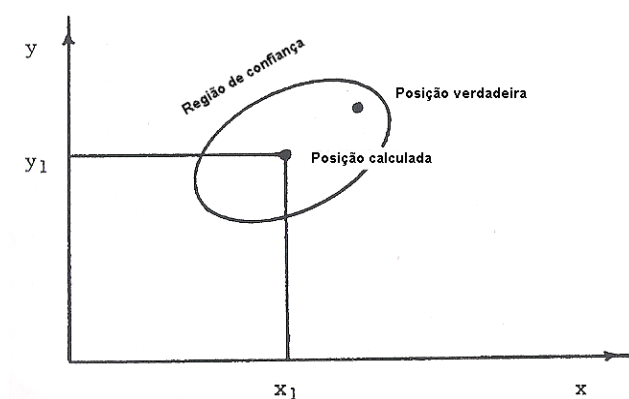
com

$$z^2 = (q_{xx}^k - q_{yy}^k)^2 + 4q_{xy}^k q_{yx}^k.$$

Supondo conhecido σ_0^2 , os parâmetros da elipse de confiança são

$$\begin{cases} a = \sigma_0 \sqrt{\lambda_1 \chi_{1-\alpha}^2(2)} \\ b = \sigma_0 \sqrt{\lambda_2 \chi_{1-\alpha}^2(2)} \\ \tan 2\alpha = \frac{2q_{xy}^k}{q_{xx}^k - q_{yy}^k} \end{cases}$$

onde α é o rumo do semi-eixo maior da elipse.



Coordenadas estimadas: região de confiança

A elipse de erro é obtida da elipse de confiança substituindo o valor de $\chi_{1-\alpha}^2(2)$ pela unidade:

$$\begin{cases} a = \sigma_0 \sqrt{\lambda_1} \\ b = \sigma_0 \sqrt{\lambda_2} \\ \tan 2\alpha = \frac{2q_{xy}^k}{q_{xx}^k - q_{yy}^k} \end{cases}$$

No caso de ser utilizado s_0^2 , tem-se:

$$\begin{cases} a = s_0 \sqrt{\lambda_1} \\ b = s_0 \sqrt{\lambda_2} \\ \tan 2\alpha = \frac{2q_{xy}^k}{q_{xx}^k - q_{yy}^k} \end{cases}$$

18. Teste global ao modelo

O critério da hipótese nula, no caso de um teste global, é “o modelo está correcto e completo”, o que se pode exprimir por $H_0 : E(s_0^2) = \sigma_0^2$, que conduz ao teste $T : \bar{v}^T P \bar{v} / \sigma_0^2$, o qual, sob a hipótese nula, tem distribuição $\chi^2 \sim (n-u)$; após a selecção do nível de significância do teste, tipicamente igual a 5 %, o valor da distribuição χ^2 com $(n-u)$ graus de liberdade é obtido de uma tabela, sendo comparado com o valor da equação $T = \bar{v}^T P \bar{v} / \sigma_0^2$: se $T \leq \chi_{\alpha}^2 (n-u)$, o teste não indica contradição entre as observações e o modelo (um teste não pode provar a validade do modelo ou que as observações são correctas). No caso $T > \chi_{\alpha}^2 (n-u)$ é necessário investigar a razão pela qual o modelo ou as observações estão errados, desde os modelos funcional (como por exemplo os parâmetros de calibração do aparelho ou o modelo de refração) e estocástico (como por exemplo as variâncias *a priori* ou as covariâncias), as observações (como por exemplo erros de centragem, pontos instáveis, má identificação dos pontos) ou os cálculos.

Os sistemas de observação geodésica são, em geral, de materialização permanente pois destinam-se a ser observados repetidamente. Dada a elevada precisão exigida, devem ter um planeamento cuidadoso, sendo os deslocamentos determinados a partir das grandezas observadas (ângulos e, por vezes, distâncias). Este planeamento consiste na selecção de um rede de referência, de vértices auxiliares, de equipamento e de métodos operativos para a medição das grandezas necessárias. Desta forma, pretende-se determinar com o menor custo possível os deslocamentos para um conjunto de pontos objecto, com um erro igual ou inferior à tolerância fixada previamente. Os critérios usados para o planeamento são a) a exactidão e a precisão, b) a robustez e c) a economia, podendo estas propriedades quantificadas a partir quer da matriz A de configuração de primeira ordem (constituída pelas derivadas parciais das

grandezas observadas relativamente às coordenadas dos vértices) quer pela matriz Σ de configuração de segunda ordem (postulada em função do equipamento de medição a utilizar e dos métodos operativos previstos). A medição das observáveis é afectada por erros de observação que têm origens diversas, como sejam o equipamento utilizado, o método operativo, as condições atmosféricas, a competência do operador, etc. A relação entre o valor exacto μ da observável e o respectivo valor y medido pode exprimir-se como:

$$y = \mu + \theta_I + \theta_E + \delta$$

onde θ_I representa os erros instrumentais, como por exemplo erros de calibração, θ_E representa os erros de origem ambiental, como por exemplo a refração horizontal e vertical e δ representa os erros aleatórios.

A exactidão e precisão de uma rede estão associadas à distribuição do vector dos erros dos deslocamentos. A exactidão é quantificada pelo efeito do parâmetro de localização θ na norma do vector dos erros:

$$\|\epsilon\| = \|C^{-1}A^T\Sigma^{-1}\theta\|$$

de tal forma que sob a hipótese nula ($\theta=0$) a rede é exacta. A precisão é descrita pela matriz de variância dos erros:

$$V(\epsilon) = \omega^2 C^{-1}$$

em que sob a hipótese nula $\omega=1$.

A robustez é a propriedade que caracteriza a resistência de uma rede ao efeito de erros sistemáticos ou grosseiros isolados; numa rede robusta estes erros irão afectar muito mais o vector dos resíduos do que o vector dos deslocamentos. A robustez é quantificada através dos números de redundância local, elementos da diagonal da matriz U , que assumem valores entre 0 e 1; uma rede robusta deve ter números de redundância local homogéneos e próximos de 0.

A economia é a propriedade que caracteriza o custo da instalação e medição da rede. Uma rede económica é aquela que atinge níveis aceitáveis de exactidão, precisão e robustez ao custo mínimo. Pretendendo-se um aumento na exactidão, precisão e robustez, é necessário utilizar equipamento mais caro, operadores mais qualificados, processos operativos mais complexos e observações mais redundantes, à custa da economia da rede.

O método utilizado na configuração de redes consiste na selecção de uma configuração inicial que é melhorada iterativamente; muitas vezes, os constrangimentos na localização das estações e as limitações dos aparelhos disponíveis não permitem grandes melhoramentos em relação à configuração inicial.

O procedimento tendo em vista a análise da estabilidade designa-se por teste de congruência, cujo objectivo é detectar se o conjunto de pontos de referência da rede permaneceu estável. Este teste é baseado no teste F de Fisher que requer o cálculo de $\hat{\sigma}_{oi}^2$, variância por grupo, obtida para cada combinação da época inicial com as restantes épocas.

19. Comparação de duas campanhas

Cada campanha é ajustada de forma independente, sendo o vector deslocamento $\vec{d}$ entre as duas épocas $\vec{d}$, a respectiva matriz cofactor Q_d e a variância *a posteriori* conjunta $\hat{\sigma}_0^2$ dados por:

$$\vec{d} = \widehat{\vec{x}}_2 - \widehat{\vec{x}}_1 \vec{d} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 \vec{d} = \widehat{\vec{x}}_2 - \widehat{\vec{x}}_1$$

$$Q_d = Q_{\widehat{\vec{x}}_2} - Q_{\widehat{\vec{x}}_1} Q_d = Q_{\widehat{\vec{x}}_2} + Q_{\widehat{\vec{x}}_1}$$

$$Q_d = Q_{\widehat{\vec{x}}_2} + Q_{\widehat{\vec{x}}_1}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = (df_1 \hat{\sigma}_{01}^2 + df_2 \hat{\sigma}_{02}^2) / df$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = (df_1 \hat{\sigma}_{01}^2 + df_2 \hat{\sigma}_{02}^2) / df, \quad df = df_1 + df_2$$

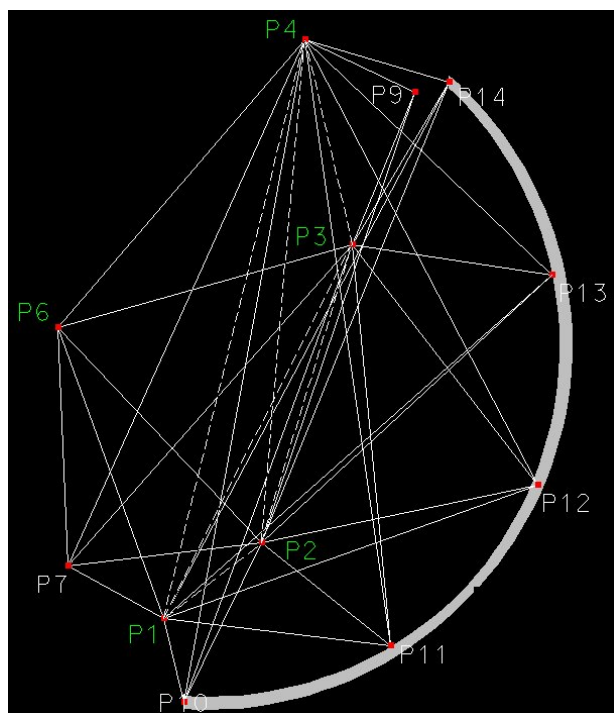
onde os índices 1 e 2 se referem às campanhas 1 e 2, respectivamente, aceitando-se o teste estatístico cuja hipótese nula é

$$H_0: \hat{\sigma}_{01}^2 = \hat{\sigma}_{02}^2 \text{ com nível de significância } \alpha \left[F\left(\frac{\alpha}{2}, df_2, df_1\right) \right]^{-1} < \frac{\hat{\sigma}_{01}^2}{\hat{\sigma}_{02}^2} < F\left(\frac{\alpha}{2}, df_2, df_1\right) \left[F\left(\frac{\alpha}{2}, df_2, df_1\right) \right]^{-1} < \frac{\hat{\sigma}_{01}^2}{\hat{\sigma}_{02}^2} < F\left(\frac{\alpha}{2}, df_2, df_1\right) \text{ se:}$$

$$\left[F\left(\frac{\alpha}{2}, df_2, df_1\right) \right]^{-1} < \frac{\hat{\sigma}_{01}^2}{\hat{\sigma}_{02}^2} < F\left(\frac{\alpha}{2}, df_2, df_1\right)$$

A rejeição do teste pode ser causada por inadequada atribuição dos pesos das observações.

Na rede sobre o plano da figura, de que se conhecem as coordenadas aproximadas de todos os pontos, foram efectuadas observações de direcção azimutal e de comprimento em duas épocas distintas, tendo-se obtido os valores listados em anexo. Admitindo que o desvio padrão *a priori* das direcções azimutais é igual a 0.3 mgon e que o desvio padrão *a priori* das distâncias é igual a 0.3 mm, efectue o ajustamento da rede utilizando as observações relativas à primeira época de observação com vista a estimar o desvio padrão *a posteriori* das direcções azimutais observadas. A partir da compensação de todas as observações, verifique a validade deste ajustamento. Repita o procedimento para a segunda época de observação e determine o eventual deslocamento da estrutura.



Rede 2D instalada na barragem de Montsalvens: pontos de referência=P₁, P₂, P₃, P₄, P₆, P₇, P₉ (pilares; a verde indicam-se os pontos estacionados); pontos objecto= P₁₀, P₁₁, P₁₂, P₁₃, P₁₄ (no paramento da barragem); as observações de direcção estão representadas a cheio (49) e as observações de distância estão representadas a tracejado (6)

Os conceitos de variância e de peso estão relacionados, podendo ambos ser considerados como medidas de precisão. A necessidade da introdução dos pesos das observações no processo de ajustamento surge devido ao frequente desconhecimento do valor absoluto dos elementos da matriz de variâncias-covariâncias das observações; se o sistema de equações normais contiver observações de tipos diferentes, introduzem-se pesos através da expressão $p_1\sigma_1^2 = p_2\sigma_2^2 = \dots = p_n\sigma_n^2 = p_i\sigma_i^2 = \sigma_0^2$, onde p_i é o peso correspondente à variância σ_i^2 e σ_0^2 é a variância por unidade de peso *a priori* (arbitrário). Multiplicando as equações de observação pela raiz quadrada do respectivo peso, as grandezas de observação (2º membro) ficam sem dimensão, ficando os termos independentes das novas equações com a mesma variância $(\sqrt{p_i})^2 \sigma_i^2 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \sigma_i^2 = \sigma_0^2$. Os pesos a atribuir às observações de direcção azimutal, de distância e de

rumo baseiam-se na determinação prévia das variâncias das diferentes observações; os pesos das direcções azimutais determinam-se efectuando um ajustamento livre da rede, na qual apenas entram as observações de direcção, de cujos resíduos v_i se tira

$\sigma_{direcções}^2 = \frac{\sum v_i^2}{n-i}$, sendo n o número de observações de direcção e i o número de incógnitas (parâmetros); neste ajustamento, para

o problema não ser impossível devem considerar-se dois pontos fixos (ou fixa-se um ponto e junta-se uma equação de distância e outra de rumo); no que diz respeito aos pesos das distâncias, os construtores de distanciómetros fornecem os parâmetros a e b conforme o tipo de aparelho e com os quais a variância de uma distância s se calcula através da expressão $\sigma_{distância}^2 = a^2 + b^2 s^2$, dependendo portanto da própria distância. Usando os valores calculados para as variâncias das observações, calculam-se os pesos

respectivos e efectua-se o ajustamento da rede utilizando todas as observações efectuadas. Após a realização dos cálculos pode-se estimar a variância por unidade de peso *a posteriori* através da expressão $s_0^2 = \frac{\sum p_i v_i^2}{n-i} = \frac{\sigma_0^2}{n-i} \frac{\sum p_i v_i^2}{\sigma_0^2}$, em que $\frac{\sum p_i v_i^2}{\sigma_0^2}$ tem distribuição χ^2 com $n-i$ graus de liberdade e portanto $\frac{s_0^2}{\sigma_0^2}$ tem distribuição $\frac{\chi_{n-i}^2}{n-i}$, o que permite efectuar um teste de comparação de variâncias da unidade de peso *a priori* e *a posteriori* e concluir da validade ou não dos pesos utilizados.

O cálculo do(s) ajustamento(s) da rede é efectuado utilizando o programa rede_2d_v2.m que estabelece as equações de observação, resolve o sistema de equações normais e calcula os resíduos e a variância da unidade de peso, assim como as coordenadas ajustadas.

Considerando o valor $\sigma_0^2 = 1$ e utilizando apenas as observações de direcção azimutal (*deficit* de característica=4), efectuou-se o ajustamento fixando os pontos P_1 e P_4 , tomando para precisão *a priori* das observações o valor 0.3 mgon (valor que consta no manual do aparelho utilizado), resultando o valor $s_0^2 = 16.0233$ para a variância *a posteriori*, com a correspondente rejeição no teste da razão das variâncias (utiliza-se o teste estatístico da razão das variâncias $y = \frac{s_0^2}{\sigma_0^2} \times (\text{nº graus de liberdade})$, em que as hipóteses alternativas são $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$, rejeitando-se H_0 se $y > \chi_{1-\alpha}^2(\text{nº graus de liberdade})$, considerando o nível de significância do teste $\alpha = 0.05$), indicando que os dois valores não são estatisticamente semelhantes.

Neste caso, o número de graus de liberdade é dado por $n - (i + ne) = 49 - (10 \times 2 + 5) = 24$, onde n indica o número de observações de direcção azimutal, i indica o número de parâmetros (dos 12 pontos foram fixados 2) e ne indica o número de pontos estacionados, pois no caso de existirem observações de direcção azimutal em cada estação há uma incógnita suplementar que é o R_0 nessa estação.

As causas mais prováveis que podem conduzir à rejeição do teste são:

- presença de erros sistemáticos nas observações
- matriz de variância-covariâncias das observações incorrecta
- modelo matemático inadequado

Trata-se então de ir degradando a precisão *a priori* das observações até se obter a aceitação no teste da razão das variâncias, o que acontece para o valor 1.0 mgon (a que corresponde $s_0^2 = 1.4421$), indicando ser esta a precisão efectiva das observações de direcção azimutal (note-se que para este procedimento é irrelevante quais os dois pontos que são tomados como *datum*).

De seguida efectua-se o ajustamento da rede considerando a totalidade das observações (*deficit* de característica=3), tomando agora um ponto e um rumo fixos. Os pesos a atribuir às distâncias obtêm-se da relação

$$p_{\text{distância}} \sigma_{\text{distância}}^2 = \sigma_0^2 \Rightarrow p_{\text{distância}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\text{distância}}^2} = \frac{1}{a^2 + (b \times 10^{-6} \times \text{comprimento})^2} = \frac{1}{0.0003^2} = 3333.3333, \text{ com } b=0 \text{ neste caso,}$$

tendo-se que o número de graus de liberdade neste caso é dado por $n - (i + ne) = 49 + 6 - (11 \times 2 - 1 + 5) = 29$ (dos 24 parâmetros, fixando um ponto e um rumo, sobram $24 - 3 = 21$).

A partir do valor da variância *a posteriori* para a variância da unidade de peso, $s_0^2 = 2.301$, pode obter-se uma estimativa para a variância média das direcções azimutais no caso deste ajustamento: de $p_{\text{direcções}} s_{\text{direcções}}^2 = s_0^2$, tem-se:

$$s_{\text{direcções}}^2 = \frac{s_0^2}{p_{\text{direcções}}} = \frac{2.301}{(1'')^{-2}} = 2.30 (1'')^2 .$$

A validade do ajustamento efectuado é verificada através do teste da razão de variâncias $y = \frac{s_0^2}{\sigma_0^2} \times (\text{n}^\circ \text{ graus liberdade})$, em que as hipótese alternativas são $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$, rejeitando-se H_0 se $y > \chi_{1-\alpha}^2 (\text{n}^\circ \text{ graus liberdade})$:

$$25 \frac{s_0^2}{\sigma_0^2} = 25 \frac{2.264}{(1.727)^2} = 25 \times 0.759 = 18.977 < \chi_{25}^2 = 37.652 ,$$

pelo que se aceita o ajustamento constrangido efectuado.

P ₁	100.1030	100.0110
P ₂	111.6010	109.0030
P ₃	122.1810	144.0130
P ₄	116.6920	168.0140
P ₆	87.6610	134.1990
P ₇	88.8550	106.2100
P ₉	129.5510	161.8670
P ₁₀	102.4480	90.1670
P ₁₁	126.6760	96.8140
P ₁₂	143.9770	115.7720
P ₁₃	145.6870	140.4290
P ₁₄	133.6100	163.0790

Coordenadas aproximadas dos vértices da rede (m)

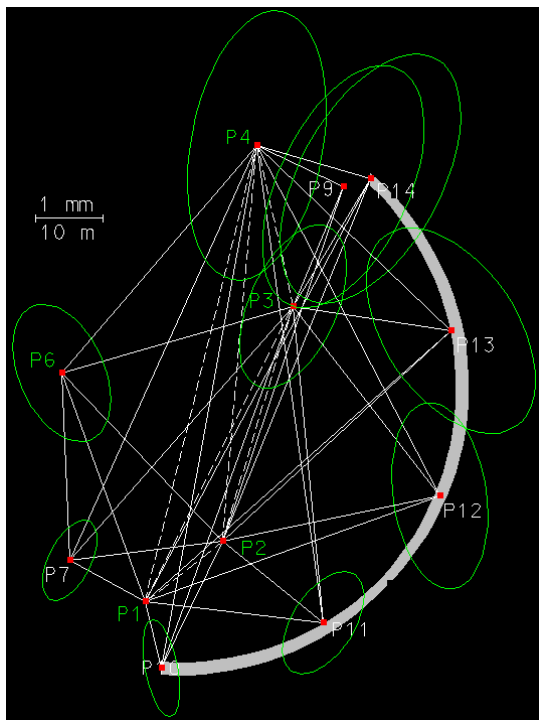
P1	P2	0.00000
P1	P12	20.29698
P1	P11	49.87515
P1	P10	127.36456
P1	P7	274.31913
P1	P6	320.03257
P1	P4	357.48467
P1	P9	370.53894
P1	P3	371.85831
P1	P14	373.34232
P1	P13	396.07187
P2	P1	0.00000
P2	P7	34.47395
P2	P6	93.87969
P2	P4	147.73200
P2	P3	160.93590
P2	P9	163.09130
P2	P14	166.85981
P2	P13	194.83639
P2	P12	229.13432
P2	P11	285.53857
P2	P10	371.04924
P3	P1	0.00000
P3	P7	16.39492
P3	P6	52.76034

P3	P4	156.08095
P3	P9	195.31749
P3	P14	204.77238
P3	P13	280.02676
P3	P12	328.54962
P3	P11	364.34953
P3	P2	389.07668
P3	P10	392.75631
P4	P1	0.00000
P4	P7	11.70847
P4	P6	29.93088
P4	P14	302.83602
P4	P9	313.15495
P4	P13	333.18105
P4	P12	354.12588
P4	P3	370.45360
P4	P11	375.89797
P4	P2	390.24610
P4	P10	396.28848
P6	P1	0.00000
P6	P7	19.50571
P6	P4	267.38348
P6	P3	304.58672
P6	P2	373.84725

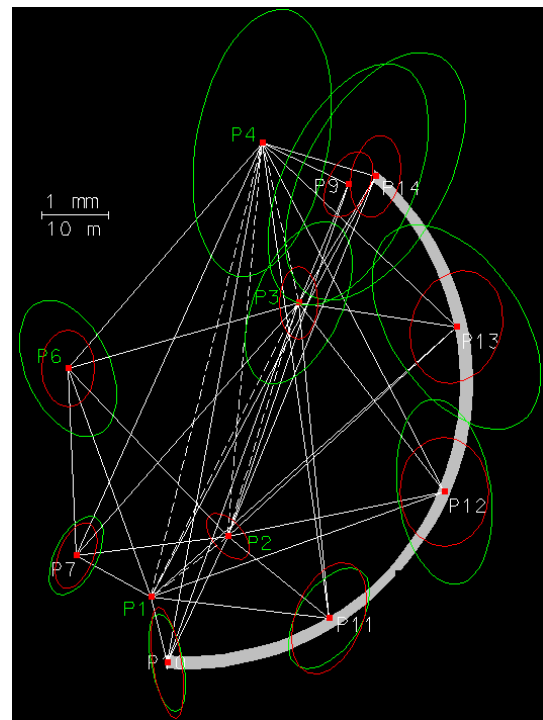
Observações de direcção azimutal (gon) correspondentes à primeira época

P1	P2	14.5967
P1	P3	49.2302
P1	P4	69.9973
P2	P3	36.5734
P2	P4	59.2302
P3	P4	24.6209

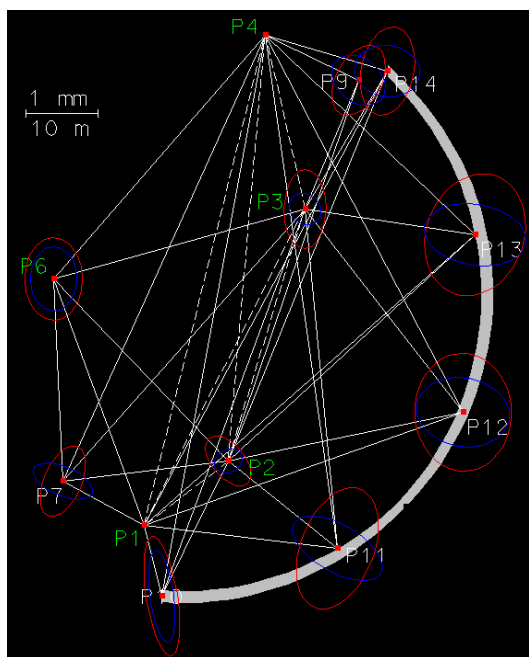
Observações de distância horizontal (m) correspondentes à primeira época



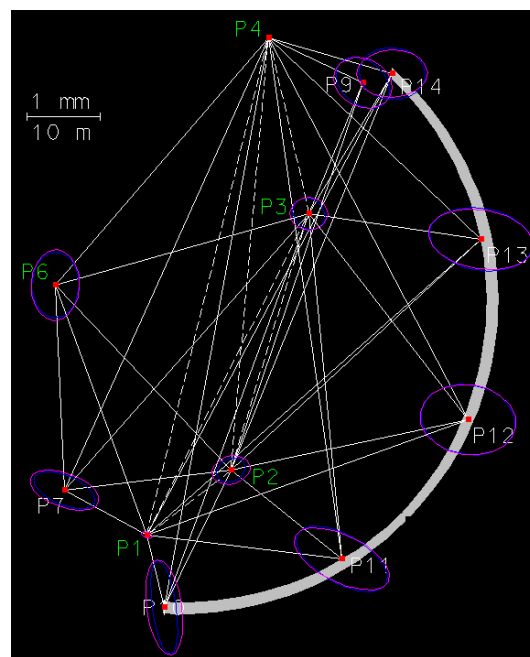
Época 1: ajustamento só com direcções azimutais (*deficit* de característica=4): datum com variância nula nos pontos P_1 e P_2 (elipses a verde)



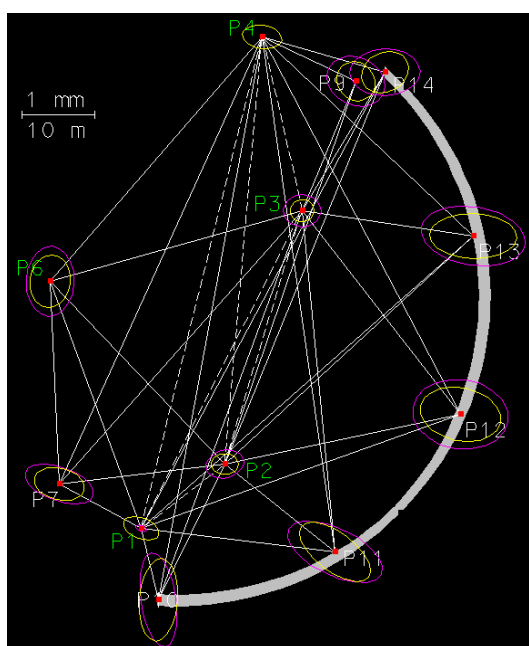
Época 1: ajustamento só com direcções azimutais (*deficit* de característica=4): datum com variância nula nos pontos P_1 e P_4 (elipses a encarnado)



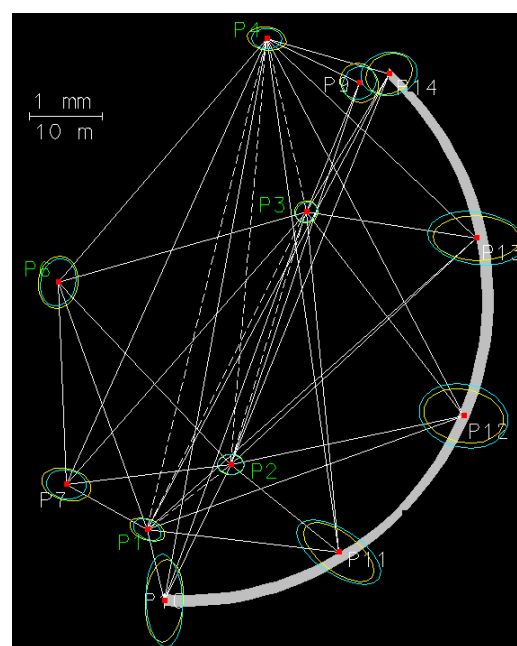
Época 1: ajustamento com direcções azimutais e com distâncias horizontais (*deficit* de característica=3): datum com variância nula nos pontos P₁ e P₄, fixando-se apenas a coordenada X deste último ponto (elipses a azul escuro)



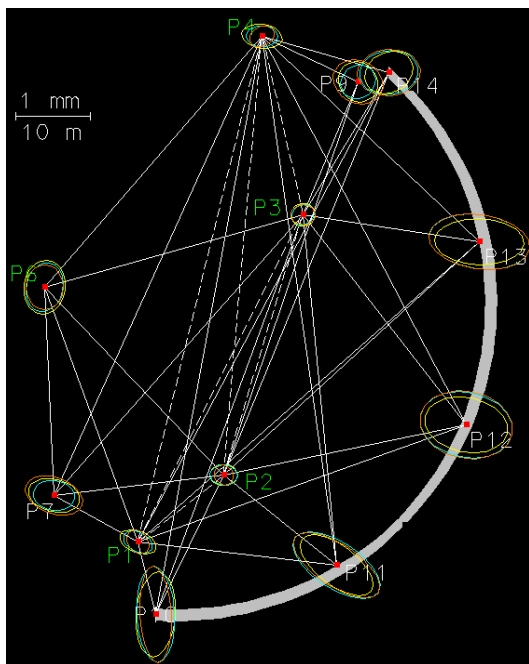
Época 1: ajustamento com direcções azimutais e com distâncias horizontais (*deficit* de característica=3): datum com constrangimentos, fixando-se o ponto P₁ e o o rumo P₁-P₄ (elipses a roxo)



Época 1: ajustamento com direcções azimutais e com distâncias horizontais (*deficit* de característica=3): datum com traço mínimo da matriz cofactor dos parâmetros (elipses a amarelo)

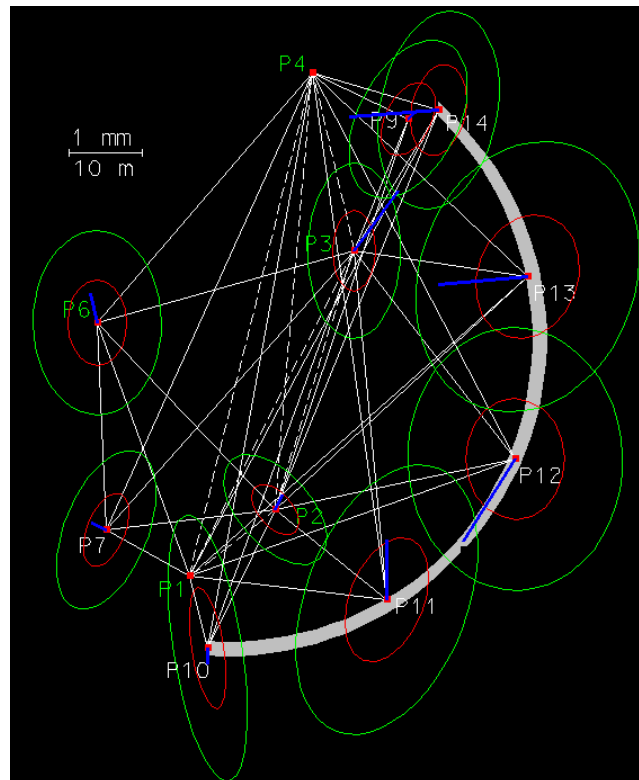


Época 1: ajustamento com direcções azimutais e com distâncias horizontais (*deficit* de característica=3): datum com minimização parcial do traço da matriz cofactor dos parâmetros (elipses a azul claro); todos os pontos de referência foram considerados na minimização parcial



Época 1: ajustamento com direcções azimutais e com distâncias horizontais (*deficit* de característica=3): datum com minimização parcial do traço da matriz cofactor dos parâmetros (elipses a cor de laranja); todos os pontos estacionados foram considerados na minimização parcial

Repetindo um processamento análogo para a época 2, considerando primeiro apenas as observações de direcção azimutal e considerando um datum com variância nula nos pontos P_1 e P_4 , a aceitação do teste de razão de variâncias só acontece quando a variância dessas observações é degradada de 0.3 mgon para 2.2 mgon, a que corresponde uma variância *a posteriori* igual a $s_0^2 = 1.4015$. Na figura 4.30a. estão desenhadas a verde as elipses de erro associadas ao processamento anterior e a encarnado as elipses de erro associadas ao mesmo processamento correspondente à época 1, sendo patente que a precisão inferior das observações da 2ª época se traduz em elipses de maiores dimensões; nessa mesma figura estão indicados a azul os vectores de deslocamento obtidos por diferença entre as coordenadas ajustadas obtidas nas duas épocas, podendo observar-se que os vectores correspondentes aos pontos objecto no coroamento da barragem P_{11} , P_{12} , P_{13} e P_{14} são significativos pois ultrapassam a elipse de erro. Pode ainda verificar-se que o ponto P_3 , embora sendo um ponto de referência, parece ter tido um deslocamento acentuado, não devendo por isso ser incluído nalgum datum.



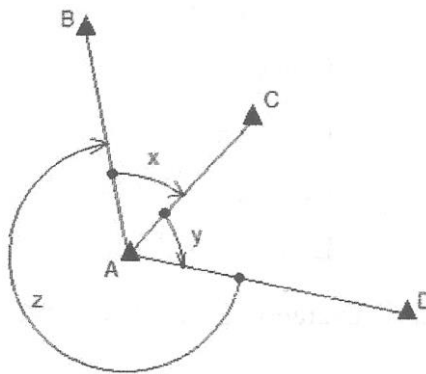
Época 2: ajustamento só com direcções azimutais (*deficit* de característica=4): datum com variância nula nos pontos P_1 e P_4 (elipses a verde); a encarnado indicam-se as elipses equivalentes correspondentes à época 1 (figura 4.29b); a azul indicam-se os vectores deslocamento entre as duas épocas

Bibliografia

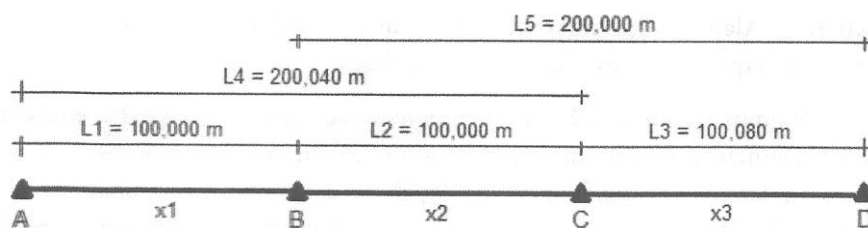
- Adjustment Computations
Paul R. Wolf, Charles D. Ghilani
- Surveying, Theory and Practice
Raymond E. Davis, Francis S. Foote, James M. Anderson, Edward M. Mikhail
- Elements of Photogrammetry
Paul R. Wolf
- Observations and Least Squares
Edward M. Mikhail
- GPS Satellite Surveying
Alfred Leick
- Concepts of Network and Deformation Analysis
W. F. Caspary
- Adjustment Theory, Lecture notes, Geodatisches Institut, Universitat Stuttgart
Sneeuw N., Krumm F., Roth M.
- Lectures given at the Wuhan College of Geodesy, Photogrammetry and Cartography, Peoples Republic of China
Welsch W., University FAF, Munich
- Adjustment Computations Part 1-2 of Notes by Kyle Snow February 4, 2021 Based on former Geodetic Science Courses GS 650 and GS 651 taught at The Ohio State University by Prof. Burkhard Schaffrin

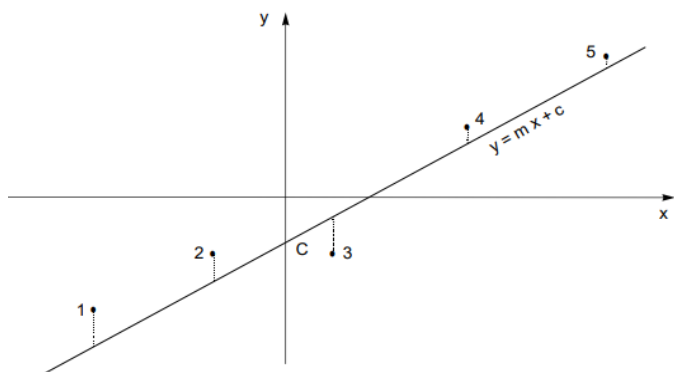
Exercícios:

1. Sejam ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 três medições não correlacionadas e de igual precisão de uma distância. Obtenha a estimativa por mínimos quadrados do valor mais provável da distância.
2. Os 3 ângulos internos de um triângulo plano são $\ell_1 = 45^\circ 25' 01''$, $\ell_2 = 65^\circ 20' 00''$, $\ell_3 = 69^\circ 15' 02''$. Obtenha a estimativa por mínimos quadrados dos 3 ângulos supondo que as observações são não correlacionadas e de igual precisão.
3. Os três ângulos horizontais medidos, conforme a figura são $x=42^\circ 17'$, $y=60^\circ 48'$, $z=256^\circ 52'$. Ajuste estes ângulos de maneira a que a respectiva soma seja igual a 360° (suponha que as observações são não correlacionadas e de igual precisão).



4. Numa base foram medidos os segmentos AB, BC, CD, AC e BD; as medidas são não correlacionadas e de igual precisão, estando os valores medidos indicados na figura. Ajustar as observações e determinar a distância AD.





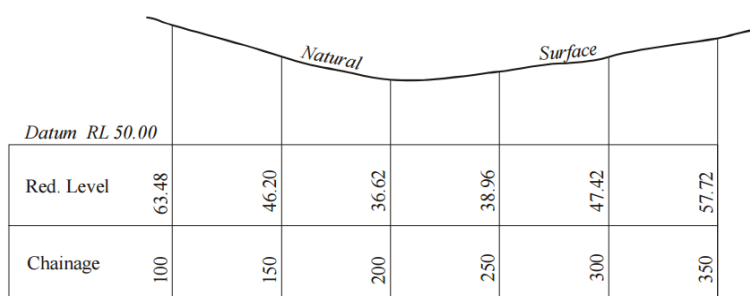
ponto	x (mm)	y (mm)
1	-40.0	-24.0
2	-15.0	-12.0
3	10.0	-12.0
4	38.0	15.0
5	67.0	30.0

5. A figura mostra a posição dos 5 pontos, cujas coordenadas, de igual precisão, estão indicadas na tabela. Ajuste uma recta a esses pontos, supondo que os resíduos estão associados apenas aos valores de y , o que leva a equações de observação da forma $y_k + v_k = mx_k + b$ (modelo paramétrico). Adoptando este tipo de equações de observação assume-se que há inconsistências entre o modelo e as observações e que estas inconsistências em x e em y estão agrupadas nos resíduos, somados ao 1º membro do modelo matemático. As equações podiam ter a forma $y_k + v_{ky} = m(x_k + v_{kx}) + b$, onde v_{ky} e v_{kx} são resíduos associados às coordenadas x e y do ponto k mas estas equações requerem um tipo mais complexo de ajustamento por mínimos quadrados (modelo geral).

6. Ajuste uma circunferência aos pontos da tabela.

i	x_i	y_i
0	0.000	0.000
1	0.500	0.250
2	1.000	1.000
3	1.500	2.250
4	2.000	4.000
5	2.500	6.250
6	3.000	9.000

7. Pretende-se ajustar uma curva parabólica vertical aos 6 pontos do terreno indicados na figura através da respectiva quilometragem e altitude. Obtenha os parâmetros dessa parábola, da forma $y_k + v_k = ax_k^2 + bx_k + c$.

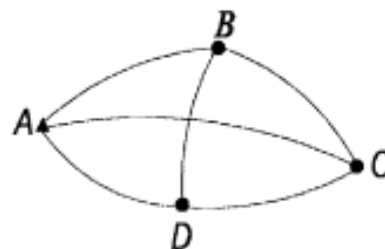


ponto	X	Y
7	54.58	17.11
8	45.47	36.56
9	28.40	53.22
10	2.02	63.72
11	28.12	63.44
12	57.49	52.55
13	80.85	34.20
14	98.08	9.14
15	105.69	17.30
16	103.83	46.96
17	88.42	71.50
18	61.26	86.84
19	26.47	91.07
20	6.59	81.37

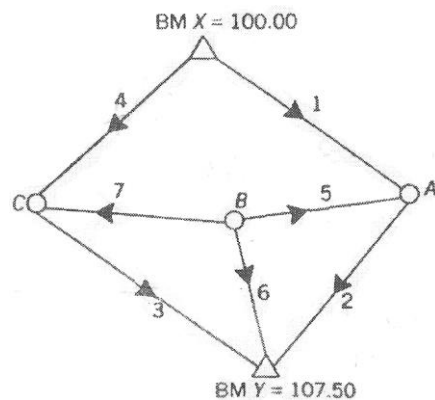
8. Ajuste uma elipse aos pontos da tabela sabendo que a equação cartesiana de uma elipse é $aX^2+2hXY+bY^2+dX+eY=1$, a partir da qual é possível obter a equação de observação $v_k+aX_k^2+2hX_kY_k+bY_k^2+dX_k+eY_k=1$.

9. A observação da rede de nivelamento indicada na figura forneceu os seguintes resultados. Sendo a altitude do ponto A igual a 437.596 m, quais são os valores mais prováveis para as altitudes dos pontos B, C e D?

de	para	desnível (m)	σ (m)
A	B	10.509	0.006
B	C	5.360	0.004
C	D	-8.523	0.005
D	A	-7.348	0.003
B	D	-3.167	0.004
A	C	15.881	0.012

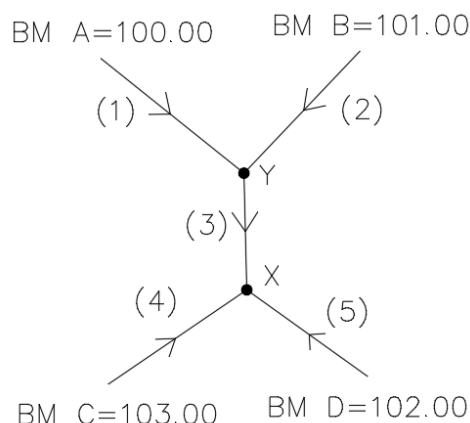


10. A figura representa uma rede de nivelamento onde se supõe que as observações têm igual peso, na qual as setas indicam desníveis positivos. Ajuste as altitudes dos pontos A, B e C.



linha	desnível observado (m)
1	5.10
2	2.34
3	1.25
4	6.13
5	0.68
6	3.00
7	1.70

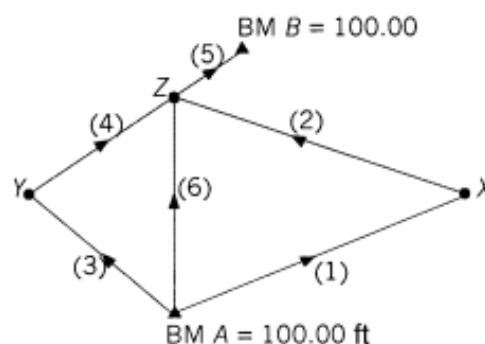
11. Para a rede de nivelamento indicada na figura, calcule o valor mais provável para as altitudes dos pontos X e Y admitindo que os desníveis têm pesos iguais (as setas indicam o sentido de cada percurso).



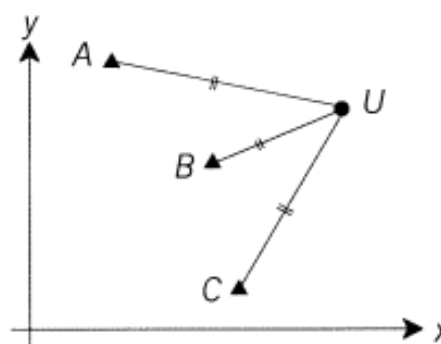
linha	desnível (m)
1	+1.00
2	+0.08
3	+0.92
4	-1.00
5	+0.08

12. Para a linha de nivelamento indicada na figura, calcule os valores mais prováveis para as altitudes dos pontos X, Y e Z utilizando os valores da tabela (pese os desníveis de acordo com o comprimento de cada lanço).

linha	comprimento (km)	desnível (m)
1	4	+1.05
2	4	-0.95
3	2	+2.10
4	2	-1.95
5	1	+0.10
6	1	+0.05

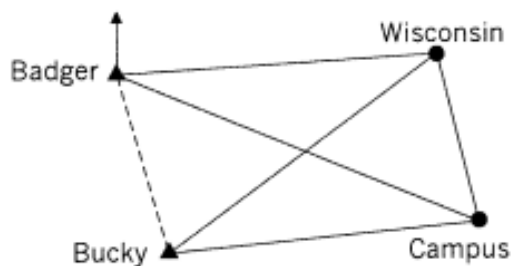


13. Relativamente à figura apresentada, suponha que fora medidas as distâncias $\ell_{AU} = 6049.00$ m, $\ell_{BU} = 4736.83$ m e $\ell_{CU} = 5446.49$ m, com as coordenadas em m dos pontos A, B e respectivamente iguais a (865.40, 4527.15), (2432.55, 2047.25) (2865.22, 27.15). Calcule as coordenadas ajustadas do ponto U.

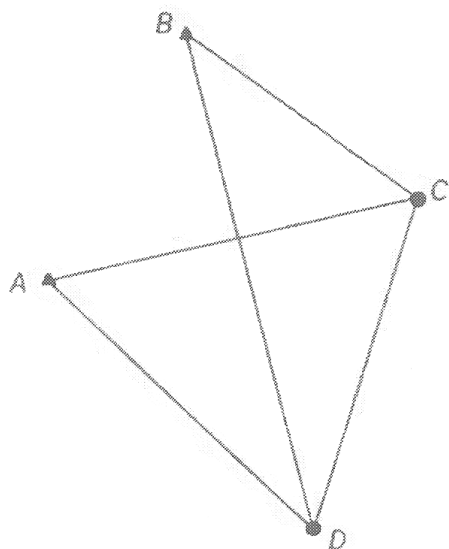


14. Tendo sido medidas as distâncias $\ell_A = 360.50 \pm 0.05$ m, $\ell_B = 250.10 \pm 0.05$ m, $\ell_C = 223.50 \pm 0.05$ m do ponto P para os pontos A, B, C de coordenadas conhecidas, obtenha a estimativa por mínimos quadrados das coordenadas (X,Y) do ponto P, supondo $(X_A, Y_A) = (300, 300)$, $(X_B, Y_B) = (600, 250)$, $(X_C, Y_C) = (800, 400)$.

15. As coordenadas planimétricas dos pontos Badger e Bucky são, respectivamente, $x=2410000.000$ m, $y=390000.000$ m e $x=2411820.000$ m, $y=386881.222$ m. Ajuste o quadrilátero da figura de forma a obter as coordenadas planas dos pontos Wisconsin e Campus.



base	Distância (m)
Badger-Wisconsin	5870.302
Badger-Campus	7297.588
Wisconsin-Campus	3616.434
Wisconsin-Bucky	5742.878
Campus-Bucky	5123.760



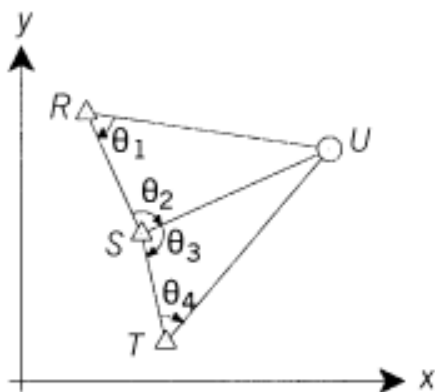
16. Efectue o ajustamento da trilateração indicada na figura sabendo que $DA=29593.10\text{m}$, $BC=22943.66\text{m}$, $AC=30728.80\text{m}$, $CD=28217.92\text{m}$, $BD=41470.26\text{m}$ e que $XA=110000.00\text{m}$, $YA=110000.00\text{m}$, $XB=121433.56\text{m}$, $YB=129803.51\text{m}$.

17. Considere a trilateração com os dados indicados nas tabelas

ponto	x (m)	y (m)
A	0.00	0.00
B	1000.00	0.00
C	0.00	1000.00

$AU=1653.92\pm 0.021\text{m}$	$BU=1067.24\pm 0.022\text{m}$	$CU=1298.10\pm 0.021\text{m}$
-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------

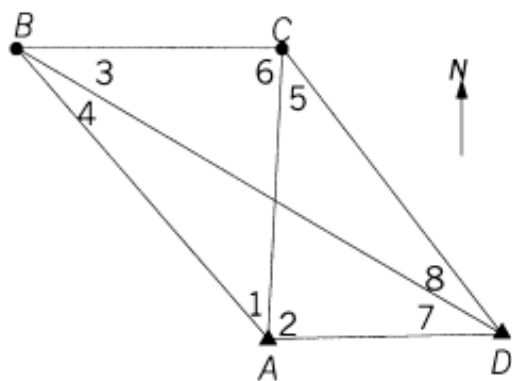
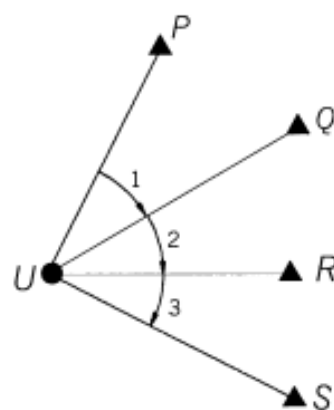
- Qual são os valores mais prováveis para as coordenadas do ponto U?
- Qual é o valor da variância a posteriori?
- Quais são os valores do desvio padrão a posteriori das coordenadas ajustadas?
- Indique os valores das distâncias ajustadas, os respectivos resíduos e desvio padrão



18. Calcule as coordenadas ajustadas do ponto U, obtidas por intersecção directa a partir dos pontos R, S e T, sabendo que $\theta_1=50^{\circ}06'50''$, $\theta_2=101^{\circ}30'47''$, $\theta_3=98^{\circ}41'17''$, $\theta_4=59^{\circ}17'01''$ e $x_R=865.40\text{m}$, $y_R=4527.15\text{m}$, $x_S=2432.55\text{m}$, $y_S=2047.25\text{m}$, $x_T=2865.22\text{m}$, $y_T=27.15\text{m}$.

19. Considerando os dados da tabela e a figura seguintes, calcule os valores mais prováveis das coordenadas do ponto U, obtidos por intersecção inversa, sendo as coordenadas em m dos pontos visados são $P(1303.599,1458.615)$, $Q(1636.436,1310.468)$, $R(1503.395, 888.362)$, $S(1506.262,785.061)$.

visada atrás	estação	visada frente	ângulo	σ (")
P	U	Q	$30^{\circ}29'33''$	5
Q	U	R	$38^{\circ}30'31''$	6
R	U	S	$10^{\circ}29'57''$	6

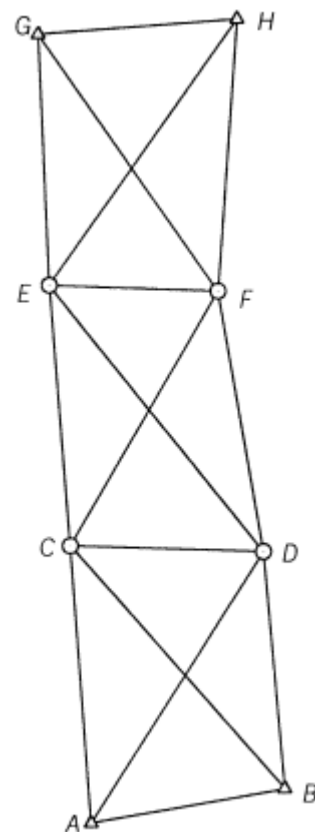


20. A figura mostra uma triangulação onde os ângulos observados têm os seguintes valores: $1=42^{\circ}35'29.0''$, $2=87^{\circ}35'10.6''$, $3=79^{\circ}54'42.1''$, $4=18^{\circ}28'22.4''$, $5=21^{\circ}29'23.9''$, $6=39^{\circ}01'35.4''$, $7=31^{\circ}20'45.8''$, $8=39^{\circ}34'27.9''$, tendo os pontos A e B as coordenadas $x_A=9270.33$, $y_A=8448.90$, $x_D=15610.58$, $y_D=8568.75$, em m. Obtenha a estimativa por mínimos quadrados das coordenadas dos pontos B e C.

21. Os dados seguintes referem-se à rede de triangulação da figura.

Obtenha as coordenadas ajustadas dos pontos C, D, E, F.

visada atrás	estação	visada frente	ângulo	σ
C	A	D	$36^{\circ}33'49.5''$	$4.6''$
D	A	B	$47^{\circ}38'40.5''$	$5.7''$
A	B	C	$58^{\circ}42'05.4''$	$5.7''$
C	B	D	$36^{\circ}09'56.9''$	$4.9''$
B	C	A	$37^{\circ}05'18.5''$	$4.6''$
D	C	B	$46^{\circ}56'40.5''$	$5.7''$
B	D	A	$37^{\circ}29'08.7''$	$5.0''$
A	D	C	$59^{\circ}24'14.1''$	$5.8''$
E	C	F	$34^{\circ}33'22.5''$	$4.8''$
F	C	D	$61^{\circ}44'34.1''$	$5.9''$
C	D	E	$49^{\circ}39'14.4''$	$5.7''$
E	D	F	$28^{\circ}48'19.6''$	$4.6''$
F	E	D	$49^{\circ}20'57.4''$	$6.2''$
D	E	C	$34^{\circ}02'48.2''$	$4.6''$
D	F	C	$39^{\circ}47'51.2''$	$4.8''$
C	F	E	$62^{\circ}03'22.6''$	$6.5''$
G	E	H	$37^{\circ}47'58.1''$	$4.8''$
H	E	F	$56^{\circ}46'43.5''$	$6.3''$
E	F	G	$52^{\circ}58'05.9''$	$6.4''$
G	F	H	$39^{\circ}04'18.8''$	$4.7''$
F	G	E	$32^{\circ}27'12.1''$	$4.8''$
H	G	F	$59^{\circ}21'51.3''$	$5.7''$
F	H	E	$31^{\circ}10'44.3''$	$4.6''$
E	H	G	$50^{\circ}22'53.5''$	$5.6''$

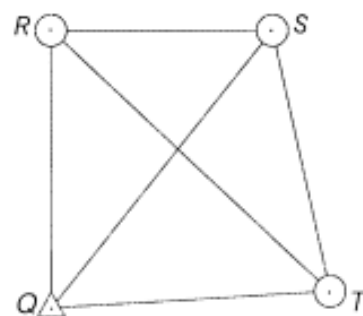


pontos fixos		
estação	x	y
A	1718.871	632.095
B	2191.570	715.709
G	1590.370	2560.743
H	2076.006	2597.745

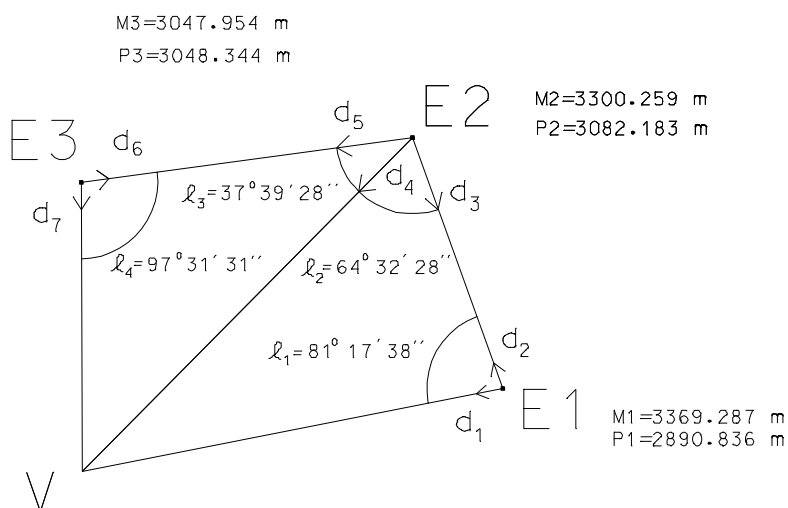
coordenadas aproximadas		
estação	x	y
C	1668.571	1310.429
D	2139.109	1296.242
E	1617.479	1949.217
F	2028.688	1934.566

22. O ponto Q da rede ilustrada na figura tem coordenadas em m (1000.00,1000.00), sendo o rumo da direcção QR= $0^{\circ}06'24.5''$, com uma incerteza igual a $\pm 0.001''$. Utilizando os dados das tabelas, ajuste a rede.

visada atrás	estação	visada frente	ângulo	$\sigma (")$
R	Q	S	$38^{\circ}48'50.7''$	4.0
S	Q	T	$47^{\circ}46'12.4''$	4.0
T	Q	R	$273^{\circ}24'56.5''$	4.4
Q	R	S	$269^{\circ}57'33.4''$	4.7
R	S	T	$257^{\circ}32'56.8''$	4.7
S	T	Q	$279^{\circ}04'31.2''$	4.5
S	R	T	$42^{\circ}52'51.0''$	4.3
S	R	Q	$90^{\circ}02'26.7''$	4.5
Q	S	R	$51^{\circ}08'45.0''$	4.3
T	S	Q	$51^{\circ}18'16.2''$	4.0
Q	T	R	$46^{\circ}15'02.0''$	4.0
R	T	S	$34^{\circ}40'05.7''$	4.0

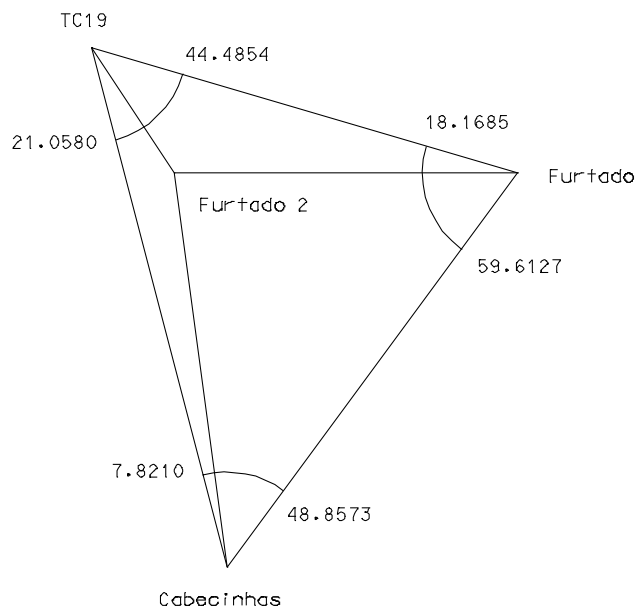


estação	visado	distância (m)	σ (m)
Q	R	1640.016	0.026
R	S	1320.001	0.024
S	T	1579.123	0.025
T	Q	1664.524	0.026
Q	S	2105.962	0.029
R	T	2266.035	0.030

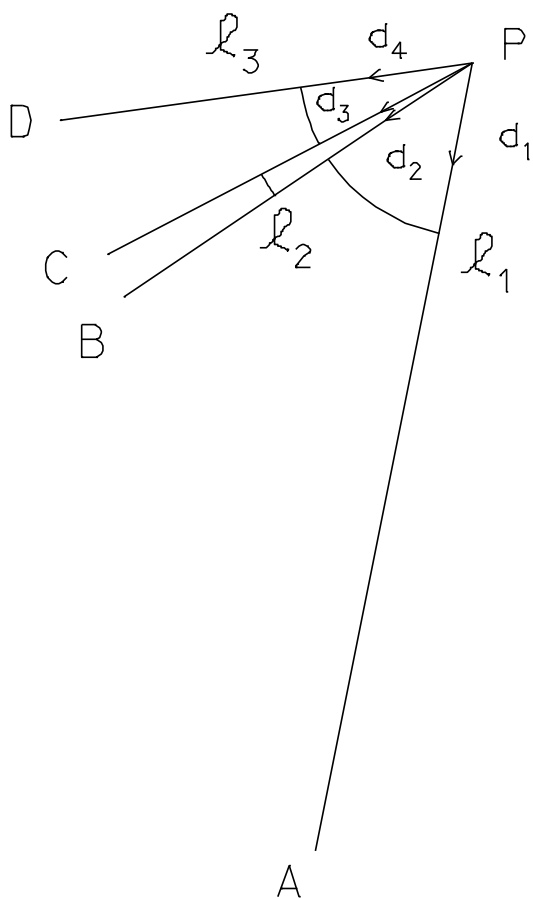


23. A figura indica as observações de direcção efectuadas, tendo em vista a obtenção dos ângulos utilizados na coordenação do ponto V por intersecção directa a partir dos pontos E1, E2 e E3, cujas coordenadas também estão indicadas. Supondo que o desvio padrão das observações de direcção é igual a $2''$, efectue a estimativa por mínimos quadrados das coordenadas do ponto V.

24. Calcule, efectuando um ajustamento por mínimos quadrados, as coordenadas do ponto Furtado 2º, sabendo que as coordenadas dos vértices estacionados são: Cabecinhas(15821.182, -14408.496), Furtado(17000.873, -12805.293) e TC19(15268.780, -12297.195). As unidades angulares são graus. A precisão das observações de direcção é igual a 0.0005 graus.



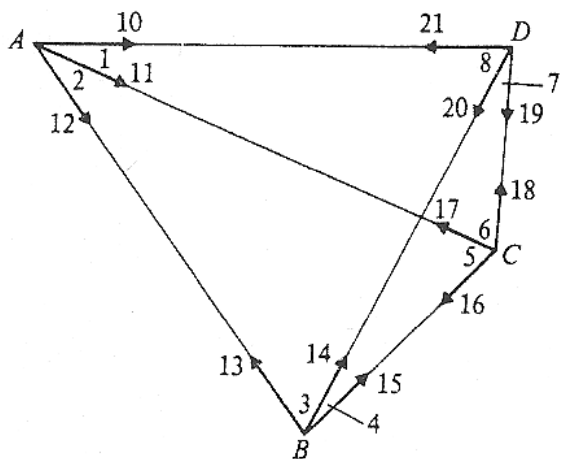
25. A figura seguinte mostra a disposição do ponto P cujas coordenadas se pretende obter por ajustamento de uma intersecção inversa. As observações e as coordenadas dos pontos visados estão indicadas nas tabelas:



Estação	M (m)	P (m)
A	88237.92	80132.03
B	82279.10	97418.58
C	81802.35	98696.21
D	80330.69	102911.40

Ponto visado	Leitura azimutal	Precisão
A	0° 00' 00"	5"
B	44° 55' 30.5"	5"
C	50° 51' 49.9"	5"
D	70° 48' 08.2"	5"

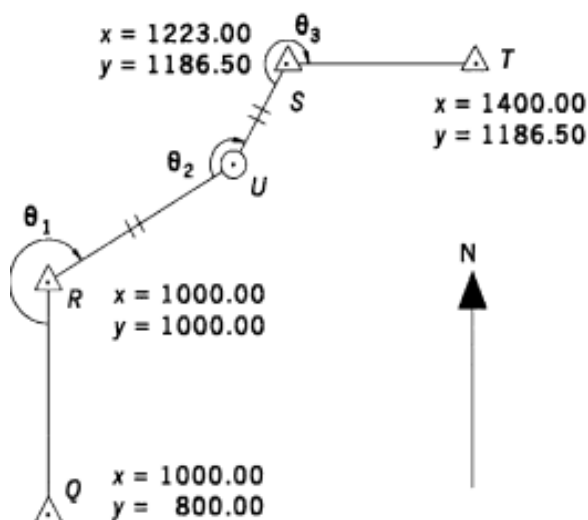
26. Considerando o quadrilátero plano representado na figura, tendo sido efectuadas observações de direcção azimutal em cada um dos vértices visando os vértices restantes, efectue o ajustamento das observações. No ajustamento terá naturalmente que ser utilizado o modelo condicional, onde não intervêm parâmetros (coordenadas dos vértices). Supõem-se as observações de direcção não correlacionadas e de igual precisão.



Quadrilátero

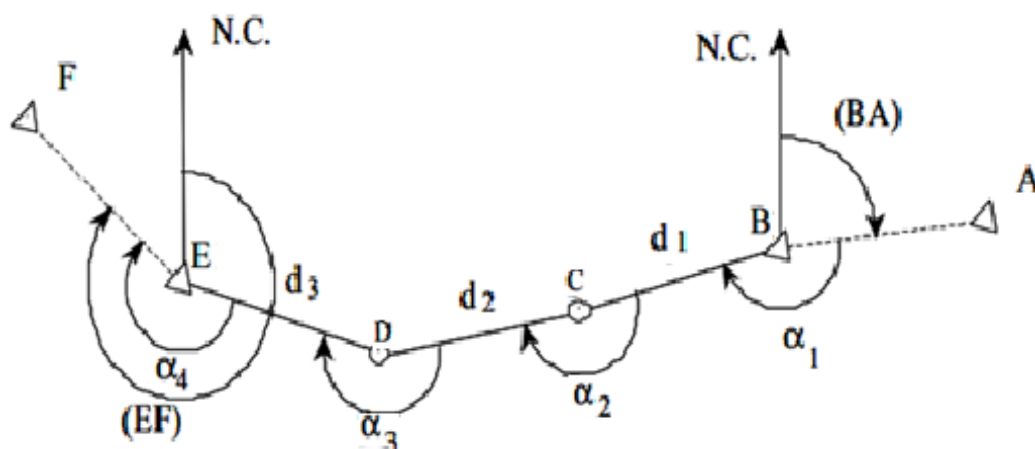
direcções, d	valor
10	00° 00' 00".00
11	22° 01' 42".51
12	38° 46' 13".71
13	00° 00' 00".00
14	57° 08' 57".10
15	76° 42' 11".23
16	00° 00' 00".00
17	86° 33' 13".45
18	145° 19' 49".38
19	00° 00' 00".00
20	15° 06' 52".28
21	99° 11' 42".94

Direcções azimutais observadas



27. A figura ilustra uma poligonal em que $RU=200.00\pm0.05\text{m}$, $US=100.00\pm0.08\text{m}$, $\theta_1=240^\circ00'\pm30''$, $\theta_2=150^\circ00'\pm30''$, $\theta_3=240^\circ01'\pm30''$, estando as coordenadas dos pontos R, Q, S e T indicadas na figura. Obtenha a estimativa por mínimos quadrados das coordenadas do ponto U.

28. Determine as coordenadas planimétricas ajustadas dos pontos C e D da poligonal representada na figura

DADOS:

$$M_B = 8478,139 \text{ m}$$

$$P_B = 2483,826 \text{ m}$$

$$M_E = 7709,336 \text{ m}$$

$$P_E = 2263,411 \text{ m}$$

$$(BA) = 68^\circ 15' 20,7''$$

$$(EF) = 300^\circ 11' 30,5''$$

QUANTIDADES
OBSERVADAS:

$$\alpha_1 = 172^\circ 53' 34'' \pm 2''$$

$$\alpha_2 = 185^\circ 22' 14'' \pm 2''$$

$$\alpha_3 = 208^\circ 26' 19'' \pm 2''$$

$$\alpha_4 = 205^\circ 13' 51'' \pm 2''$$

$$d_1 = 281,832 \pm 0,016 \text{ m}$$

$$d_2 = 271,300 \pm 0,016 \text{ m}$$

$$d_3 = 274,100 \pm 0,016 \text{ m}$$

PEDIDOS:

$$M_C = ?$$

$$P_C = ?$$

$$M_D = ?$$

$$P_D = ?$$